

Uniwersytet Wrocławski  
Wydział Matematyki i Informatyki  
Instytut Matematyczny  
*specjalność: Matematyka Stosowana*

*Martyna Wereta*

## Oscylacje okresowe w układach elektrycznych

Praca licencjacka  
napisana pod kierunkiem  
prof. dr hab. Grzegorza Karcha

Wrocław 2023

## Streszczenie

Celem pracy jest matematyczna oraz numeryczna analiza kilku modeli z teorii obwodów elektrycznych wykazujących oscylacje okresowe. Ważnym aspektem rozważań jest podkreślenie istoty wzajemnego powiązania matematyki z fizyką oraz biologią. Do opracowania modeli zastosowano teorię równań różniczkowych zwyczajnych. W celu wykazania przewodniej tezy o cyklach granicznych w owej pracy wykorzystano Twierdzenie Poincarégo-Bendixsona oraz równania Liénarda. Kluczowym komponentem przeprowadzenia rozumowania był właściwy dobór parametrów modeli, które odpowiadają za pojawienie się oscylacji okresowych. Ważną część projektu stanowi także numeryka oparta o schemat Eulera przeprowadzona w języku Python, która umożliwiła wizualizację uzyskanych wyników.

## Abstract

The aim of the thesis is a mathematical and numerical analysis of several models from the theory of electrical circuits exhibiting periodic oscillations. An important aspect of the considerations is to emphasize the essence of the interconnection of mathematics with physics and biology. The theory of ordinary differential equations was applied to develop the models. In order to prove the leading thesis about boundary cycles, the Poincaré–Bendixson Theorem and the Liénard equations were used in this work. The key component of the reasoning was the proper selection of model parameters that are responsible for the appearance of periodic oscillations. An important part of the project is also a numerical analysis based on the Euler scheme carried out in Python, which enabled visualization of the obtained results.

# Spis treści

<b>Wstęp</b>	<b>4</b>
<b>1 Liniowe równania obwodów elektrycznych</b>	<b>5</b>
1.1 Drgania swobodne . . . . .	6
1.2 Drgania tłumione . . . . .	6
1.3 Drgania wymuszone z tłumieniem . . . . .	7
1.4 Drgania wymuszone bez tłumienia . . . . .	8
<b>2 Oscylator van der Pola</b>	<b>10</b>
2.1 Wprowadzenie do modelu . . . . .	10
2.2 Analiza matematyczna modelu . . . . .	10
<b>3 Model Zeemana pracy serca</b>	<b>13</b>
3.1 Wprowadzenie do modelu . . . . .	13
3.2 Analiza matematyczna modelu . . . . .	13
<b>4 Model FitzHugh-Nagumo</b>	<b>18</b>
4.1 Wprowadzenie do modelu . . . . .	18
4.2 Analiza matematyczna modelu . . . . .	18
4.3 Rozwiązania okresowe układu FitzHugh-Nagumo . . . . .	21
<b>5 Dodatek matematyczny</b>	<b>24</b>
5.1 Teoria linearyzacji . . . . .	24
5.2 Lemat - kryterium na stabilność . . . . .	25
5.3 Trajektorie i portret fazowy . . . . .	27
5.4 Twierdzenie Poincarégo-Bendixsona i równanie Liénarda . . . . .	28
<b>6 Dodatek numeryczny</b>	<b>30</b>
6.1 Wybrane kody do symulacji w języku Python . . . . .	30
<b>Literatura</b>	<b>33</b>

# Wstęp

Układy elektryczne towarzyszą nam w różnych dziedzinach życia - od prądu zmiennego płynącego w przewodach ukrytych za włącznikiem światła, przez silniki na prąd zmienny w samochodach, po impulsy elektryczne występujące w ludzkim ciele. Tak z pozoru proste pojęcie nie odnosi się jedynie do fizyki, a swoje zastosowanie znajduje również w biologii i medycynie. Wszystkie te z pozoru różne systemy łączy jakże ważna, charakterystyczna dla obwodów elektrycznych cecha wspólna - oscylacje. To dzięki nim obserwujemy tak istotne zjawiska jak cykle aktywności bioelektrycznej mózgu zwane falami mózgowymi, czy bicie serca wywołane bodźcami elektrochemicznymi. Niniejsza praca ma na celu przedstawienie kilku modeli wykazujących zachowanie periodyczne, odnoszących się do kluczowych aspektów ludzkiego życia.

Praca składa się z sześciu rozdziałów. W rozdziale pierwszym przedstawiono zagadnienia z zakresu liniowych równań obwodów elektrycznych. Omówiono różne przypadki drgań. W rozdziale drugim omówiony został model oscylatora van der Pola, który swoje zastosowanie znajduje w teorii przewodów elektrycznych a także stanowi bazę innych układów, opisujących między innymi zjawiska medyczne. Występowanie cyklu granicznego zostało w tym przypadku wykazane w oparciu o twierdzenie Poincarégo-Bendixsona, używając twierdzenia Liénarda, zostały przeprowadzone także symulacje numeryczne potwierdzające tezę. Rozdział trzeci poświęcony został analizie modelu Zeemana pracy serca, którego filarem jest układ van der Pola. Dzięki równaniom Liénarda zostało udowodnione, że układ ma rozwiązanie periodyczne, co także zostało zaobserwowane na symulacjach numerycznych. Rozważania dotyczące tego modelu ukazały, jak głębokie powiązanie istnieje pomiędzy dwiema - można pomyśleć - odrębnymi dziedzinami życia - matematyką i medycyną. W rozdziale czwartym skoncentrowano się na modelu FitzHugh-Nagumo, opisującym dynamikę impulsów elektrycznych w neuronach. W celu pokazania występowania rozwiązań okresowych przeprowadzono symulacje komputerowe. W rozdziale piątym, będącym dodatkiem matematycznym zawarto kluczowe twierdzenia, definicje oraz fakty, niezbędne do przeprowadzenia rozumowania w owej pracy. Rozdział szósty zawiera wybrane kody w języku Python, które zostały użyte do przeprowadzenia symulacji.

# Rozdział 1

## Linowe równania obwodów elektrycznych

Rozdział napisany w oparciu o [1].

Inspiracją wielu równań różniczkowych jest teoria obwodów elektrycznych. W prostym obwodzie elektrycznym definiujemy oporność  $R$ , indukcyjność  $L$  oraz pojemność  $C$ . Przepływ prądu w takim obwodzie determinowany jest przez *prawa Kirchoffa*, istotne są również równania wiążące przepływ prądu z opornością, indukcyjność z pojemnością oraz pojemność z odpowiednimi różnicami potencjałów. Są to między innymi *prawo Faradaya* i *prawo Ohma*. Równanie obwodu elektrycznego dane jest wzorem

$$\ddot{v} + \frac{R}{L}\dot{v} + \frac{1}{LC}v = 0. \quad (1.1)$$

Przyjmując  $\frac{R}{L} = 2k$  i  $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$  otrzymujemy *równanie oscylatora harmonicznego*

$$\ddot{v} + 2k\dot{v} + \omega_0^2v = 0, \quad (1.2)$$

które dzięki podstawieniu  $x_1 = v$  i  $x_2 = \dot{v}$  można zapisać w postaci układu dwóch równań pierwszego rzędu

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega_0^2x_1 - 2kx_2. \end{cases} \quad (1.3)$$

Gdy w układzie pojawi się zewnętrzna siła elektromotoryczna  $E(t)$ , równanie obwodu będzie zapisane jako

$$\ddot{v} + 2k\dot{v} + \omega_0^2v = \omega_0^2E(t), \quad (1.4)$$

co możemy przeformułować do układu

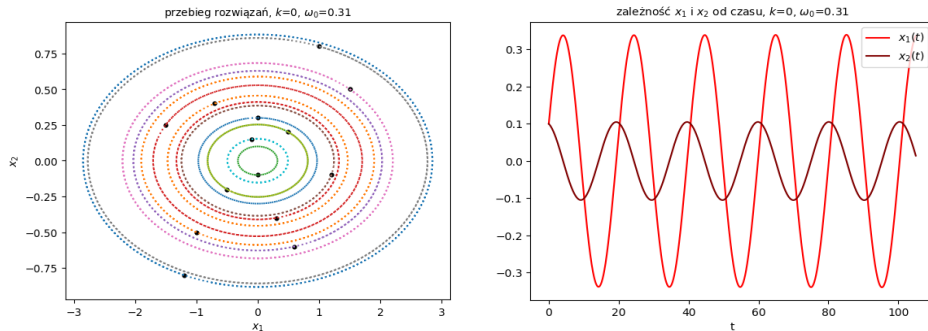
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega_0^2x_1 - 2kx_2 + \omega_0^2E(t). \end{cases} \quad (1.5)$$

## 1.1 Drgania swobodne

Możliwa jest sytuacja braku oporności, czyli  $R = 0$ . Wówczas otrzymujemy równanie oscylatora harmonicznego bez tłumienia, którego rozwiązanie ogólne jest postaci

$$v(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t = A \cos(\omega_0 t - \delta),$$

co opisuje swobodne drgania elektryczne o amplitudzie  $A$  z częstotliwością  $\omega_0$  i przesunięciem fazowym  $\delta$ .



Rysunek 1.1: Portret fazowy układu (1.3) i zależność  $x_1$  i  $x_2$  od czasu. W przypadku drgań swobodnych portret fazowy przedstawia centrum skoncentrowane wokół  $(0, 0)$ , a amplituda drgań jest stała.

## 1.2 Drgania tłumione

Wartość oporności znacząco wpływa na własności obwodu. W celu zobrazowania tego rozważmy wielomian charakterystyczny

$$\lambda^2 + 2k\lambda + \omega_0^2 = 0,$$

którego pierwiastki to

$$\lambda_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2 - \omega_0^2}.$$

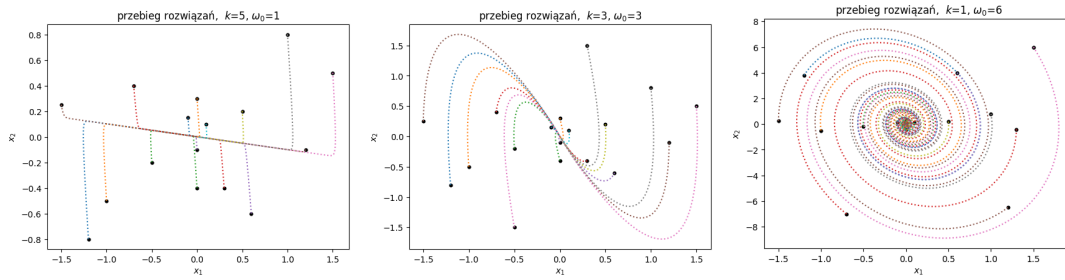
Zauważmy, że  $k^2 - \omega_0^2 < |k|$  i w zależności od znaku części rzeczywistej wartości własnych możliwe są trzy sytuacje, czyli trzy różne zachowania obwodu.

- $k^2 - \omega_0^2 > 0 \implies \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}^- \implies v(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$

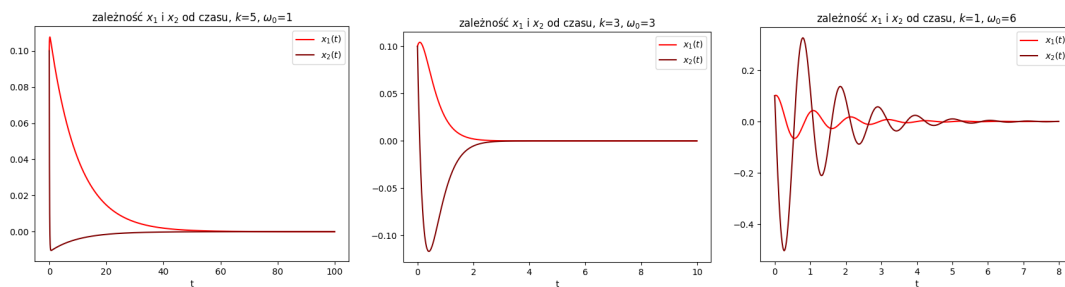
- $k^2 - \omega_0^2 = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}^- \implies v(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-kt}.$

Licząc pochodną otrzymujemy, że rozwiązanie osiąga ekstremum w punkcie  $t = \frac{c_2 - kc_2}{kc_2}$ , a później monotonicznie dąży do 0.

- $k^2 - \omega_0^2 < 0 \implies \lambda_{1,2} \in \mathbb{C}^- \implies v(t) = e^{-kt} (c_1 \cos \sqrt{\omega_0^2 - k^2} t + c_2 \sin \sqrt{\omega_0^2 - k^2} t) \implies v(t) = A e^{-kt} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - k^2} t - \delta).$  Owe rozwiązanie przedstawia drgania z przesunięciem fazowym  $\delta$  i częstotliwością  $\sqrt{\omega_0^2 - k^2}$ .



Rysunek 1.2: Portrety fazowe układu (1.3) dla 1, 2, 3 przypadku kolejno. W przypadku silnego tłumienia obserwujemy węzeł stabilny, w przypadku tłumienia granicznego występuje węzeł zdegenerowany stabilny, natomiast dla małego tłumienia pojawia się ognisko stabilne.



Rysunek 1.3: Zależność zmiennych od czasu układu (1.3). Rysunki odpowiadające kolejno sytuacjom 1, 2, 3. W zależności od wartości  $k^2 - \omega_0^2$  obserwujemy różny przebieg zmian napięcia. Na podstawie powyższych rozważań wnioskujemy, że tłumienie w obwodzie jest implikowane przez występowanie oporności. W zależności od wielkości tłumienia, napięcie w obwodzie maleje do 0 „prawie monotonicznie” bądź zanika w charakterze drgań o amplitudzie malejącej wykładniczo.

### 1.3 Drgania wymuszone z tłumieniem

Wprowadzając do obwodu z tłumieniem opisanego równaniem (1.4) wymuszenie okresowe postaci

$$E(t) = E_0 \cos \omega t$$

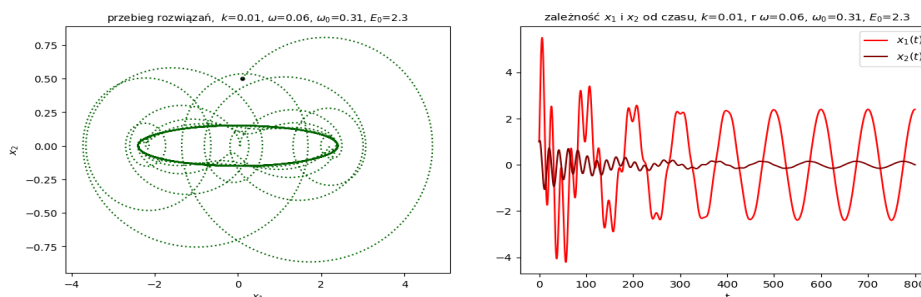
mamy na celu zaobserwowanie drgań, które nie zanikają. Wystarczy więc znaleźć rozwiązanie szczególne równania (1.4), które po obliczeniach przyjmuje formę

$$\phi(t) = \frac{\omega_0^2 E_0 \cdot \cos(\omega t - \delta)}{\sqrt{4k^2 \omega^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2}}, \quad (1.6)$$

a więc rozwiązanie równania (1.4) to

$$v(t) = v_0(t) + \phi(t),$$

przy czym postać  $v_0(t)$  jest determinowana przez związek między  $k$  i  $\omega_0$ . Co ważne, niezależnie od relacji  $k$  i  $\omega$ ,  $v_0(t)$  szybko zbiega do 0, co za tym idzie, dla dużych  $t$ ,  $v(t)$  jest niemalże równe  $\phi(t)$ , a to odpowiada drganiom z częstotliwością wymuszającą  $\omega$ .



Rysunek 1.4: Portret fazowy układu (1.5) i zależność zmiennych od czasu. Wyraźnie widać oddziaływanie tłumienia, drgania własne zanikają i wraz z upływem czasu w układzie pozostaje widoczna tylko wymuszająca siła okresowa. Warto podkreślić, że przy  $k \rightarrow 0$  amplituda drgań dąży do nieskończoności. Trajektoria rozwiązania kreuje elipsy różnej wielkości i w różnym położeniu, jednak wraz z upływem czasu zakreśla elipsę, której już nie opuszcza.

## 1.4 Drgania wymuszone bez tłumienia

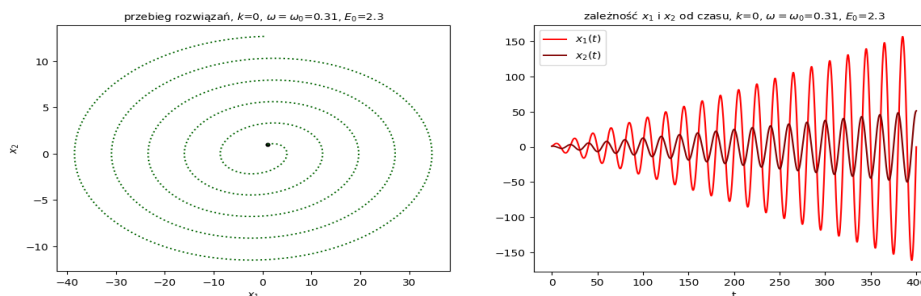
Rozważmy przypadek gdy  $k = 0$ , czyli nie występuje tłumienie oraz  $\omega = \omega_0$ , czyli częstotliwość wymuszenia jest tożsama z częstotliwością drgań własnych układu bez tłumienia. Rozwiązanie szczególne jest postaci

$$\phi(t) = \frac{1}{2}\omega_0 E_0 t \sin \omega_0 t,$$

zatem rozwiązanie ogólne zapisujemy jako

$$v(t) = A \cos(\omega_0 t - \delta) + \phi(t).$$

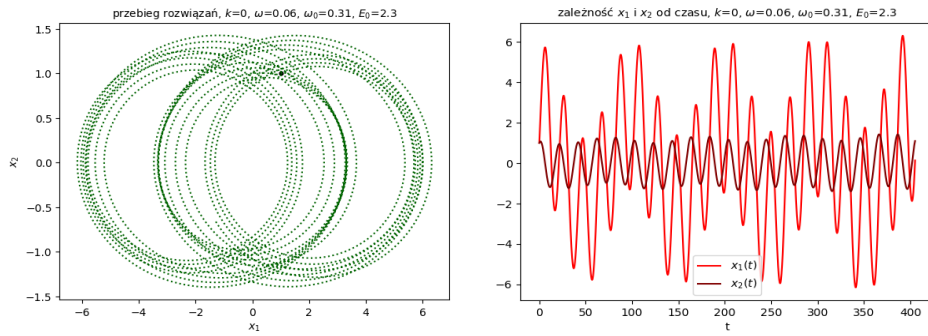
Pierwszy składnik ma stałą amplitudę drgań  $A$  zaś amplituda drugiego składnika rośnie liniowo do nieskończoności wraz ze wzrostem  $t$ . Taka sytuacja określana jest mianem *rezonansu*.



Rysunek 1.5: Portret fazowy układu (1.5) i zależność zmiennych od czasu. Obserwujemy rezonans, czyli nieograniczony wzrost amplitudy drgań wymuszonych siłą okresową o częstotliwości równej częstotliwości drgań własnych układu. Trajektoria rozwiązania rozbiega do nieskończoności.



W sytuacji gdy  $\omega \neq \omega_0$  zachowanie układu wykazuje istotnie inne cechy.



Rysunek 1.6: Portret fazowy układu (1.5) i zależność zmiennych od czasu. Trajektoria rozwiązania tworzy przesuwające się w różne strony okręgi, nie stabilizuje się na żadnym z nich. Wyraźnie widać zastosowanie siły wymuszającej okresowej zawierającej funkcję cosinus.

# Rozdział 2

## Oscylator van der Pola

Rozdział napisany w oparciu o [1].

### 2.1 Wprowadzenie do modelu

Oscylator van der Pola wywodzi się z tematyki obwodów elektrycznych. Został opisany przez holenderskiego elektrotechnika i fizyka Balthasara van der Pola jako model prostego generatora drgań z lampą elektronową. Przez ostatnie lata używany był w modelowaniu pracy serca. Przedstawia się następującym układem równań różniczkowych:

$$\begin{cases} \epsilon \dot{x} &= -(x^3 - x + b) \\ \dot{b} &= x. \end{cases} \quad (2.1)$$

### 2.2 Analiza matematyczna modelu

#### **Twierdzenie 2.1 (Twierdzenie o punktach stacjonarnych)**

*Jedynym punktem stacjonarnym dla układu van der Pola jest punkt  $(0, 0)$ .*

**DOWÓD.** Szukając punktów stacjonarnych należy szukać punktów spełniających warunki

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{b} = 0. \end{cases}$$

Skoro tak, to musi zachodzić  $x = 0$  aby spełnione było równanie drugie. Gdy do pierwszego równania wstawimy wcześniej wyznaczone  $x$  zobaczymy, że w takim razie również  $b = 0$ . Zatem jedynym punktem stacjonarnym układu jest punkt o obu współrzędnych zerowych, czyli  $(0, 0)$ .  $\square$

#### **Twierdzenie 2.2 (Twierdzenie o niestabilności)**

*Jedyny punkt stacjonarny układu van der Pola jest położeniem równowagi niestabilnym.*

**DOWÓD.** Rozważmy linearyzację w pobliżu punktu  $(0, 0)$  i zastosujmy Twierdzenie 5.1 przypomniane w rozdziale Dodatek matematyczny. Chcąc wyznaczyć wielomian

charakterystyczny otrzymujemy

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 1.$$

Ponieważ  $\Delta = -3 < 0$ , to dla powyższego wielomianu charakterystycznego otrzymujemy dwie wartości własne:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

które są urojone sprzężone, z dodatnią częścią rzeczywistą, więc otrzymujemy ognisko niestabilne, a zatem punkt  $(0, 0)$  jest położeniem równowagi niestabilnym.  $\square$

Pokażemy teraz, że układ (2.1) ma rozwiązania okresowe wykorzystując Twierdzenie 5.3 z Dodatku matematycznego. Różniczkując pierwsze równanie i następnie wstawiając do niego drugie otrzymujemy

$$\epsilon \ddot{x} - \dot{x}(-3x^2 + 1) + x = 0,$$

co po przekształceniach i oznaczeniu  $k = \frac{1}{\epsilon}$  daje

$$\ddot{x} - k\dot{x}(1 - 3x^2) + kx = 0.$$

Zatem oznaczając  $x(t) = J(t)$  układ równań (2.1) możemy zapisać w postaci jednego równania

$$\ddot{J} - k(1 - 3J^2)\dot{J} + kJ = 0, \quad (2.2)$$

dla którego sformułowane jest poniższe twierdzenie.

### **Twierdzenie 2.3**

*Równanie van der Pola*

$$\ddot{J} - k(1 - 3J^2)\dot{J} + kJ = 0 \quad (2.3)$$

*ma dokładnie jedno rozwiązanie okresowe, które jest cyklem granicznym.*

DOWÓD. Równanie (2.3) jest szczególnym przypadkiem równania (5.6), dla

$$f(J) = J^3 - J.$$

By dowieść, że równanie (2.3) ma dokładnie jedno asymptotycznie stabilne rozwiązanie okresowe, należy wykazać, że  $f(J) = J^3 - J$  spełnia warunki Twierdzenia 5.3 i  $\alpha = \beta$ . Po pierwsze,  $f(J) = J^3 - J$  jest oczywiście funkcją nieparzystą. Po drugie

$$\lim_{|J| \rightarrow \infty} J^3 - J = \infty$$

oraz dla stałej

$$\beta = 1$$

$f(J)$  jest dodatnia i rośnie monotonicznie dla  $J > 1$ . Po trzecie

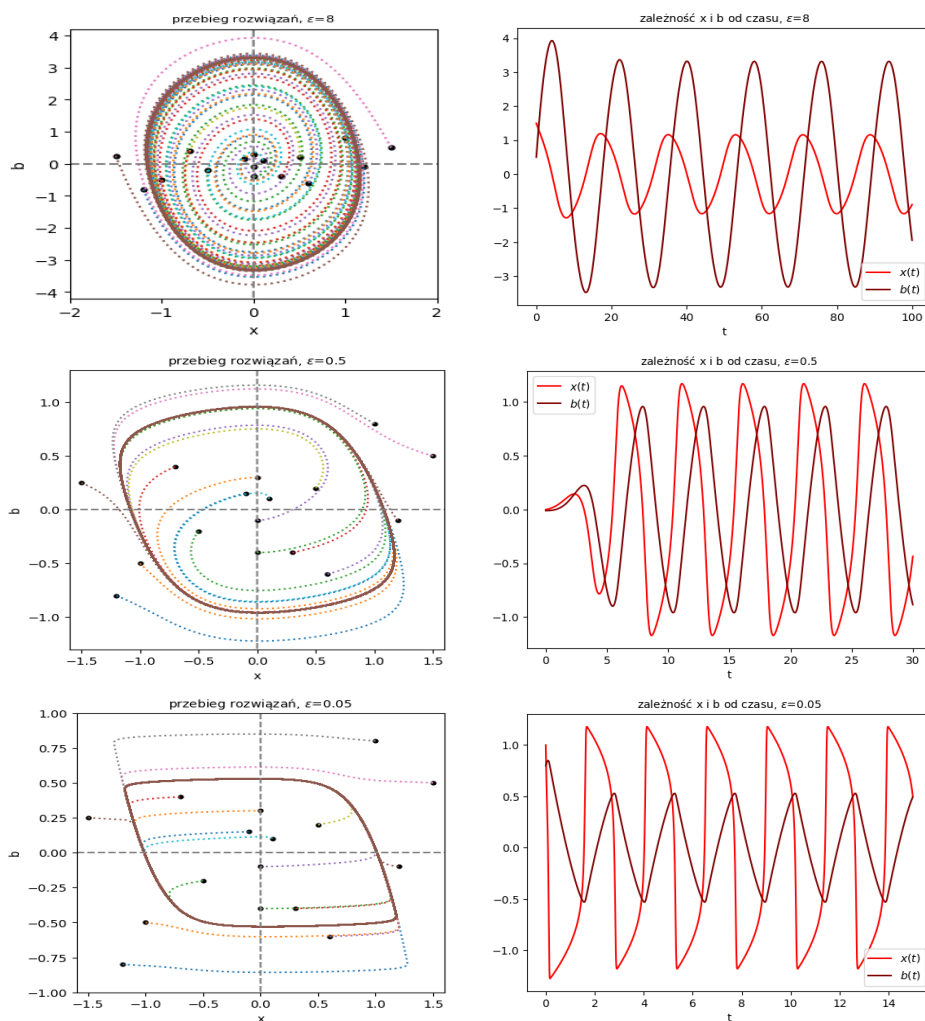
$$J^3 - J < 0 \quad \text{dla } J \in (0, 1).$$

Ponadto zachodzi

$$\alpha = \beta = 1,$$

co dowodzi prawdziwości postawionej tezy.  $\square$

Zatem układ (2.1) ma rozwiązanie okresowe będące cyklem granicznym, czyli takim, w okolicy którego nie ma innych rozwiązań okresowych. Poniższe wykresy obrazują taki cykl dla różnych doborów wartości początkowych oraz różnych wartości parametru  $\epsilon$ .



Rysunek 2.1: Portrety fazowe układu (2.1) oraz zależność zmiennych od czasu. Niezależnie od wyboru punktów początkowych trajektorie rozwiązań zbiegają do cyklu granicznego. W każdym przypadku zależność  $x$  i  $b$  od czasu ma charakter oscylacji. Wraz ze zmianą wartości parametru  $\epsilon$  obserwujemy zmianę kształtu trajektorii. Dla dużych wartości parametru  $\epsilon$  cykl dąży do kształtu przypominającego elipsę, natomiast dla małej wartości  $\epsilon$  pojawia się cykl graniczny, którego charakter zbiega do figury bliskiej prostokąta. Manipulując tym parametrem jesteśmy w stanie tworzyć generatory drgań elektrycznych o różnych kształtach - od drgań sinusoidalnych, równoznaczących z cyklem granicznym o kształcie okręgu, do drgań relaksacyjnych, związanych z cyklem przypominającym kształtem prostokąt.

# Rozdział 3

## Model Zeemana pracy serca

Rozdział napisany w oparciu o [1] oraz [5].

### 3.1 Wprowadzenie do modelu

Matematyczny model pracy serca został skonstruowany przez brytyjskiego matematyka E. C. Zeemana, który zauważył, że dla modelowania dynamiki centralnego narządu układu krwionośnego potrzebnych jest kilka postulatów:

1. Powinno istnieć stabilne położenie równowagi, do którego układ okresowo powraca,
2. Powinien istnieć próg działania bodźca, którego przekroczenie powoduje wystąpienie szybkiej zmiany w układzie,
3. Powinien następować powrót do stanu równowagi po zakończeniu działania bodźca.

Zeeman oparł swoje rozważania na modelu van der Pola, jednakże do spełnienia założeń potrzebna była modyfikacja pozwalająca na osiągnięcie stabilnego położenia równowagi. Układ

$$\begin{cases} \epsilon \dot{x} &= -(x^3 - ax + b) \\ \dot{b} &= x - x_a \end{cases} \quad (3.1)$$

znany jest jako model Zeemana pracy serca, przy czym zmienna  $x$  odpowiada za mierzenie długości włókien mięśnia sercowego, zmienna  $b$  - za pomiar siły bodźca elektrochemicznego, który stymuluje pracę mięśnia, parametr  $a$  odpowiada za odwzorowanie działania ciśnienia krwi, natomiast  $x_a > 0$  modeluje średnią długość mięśnia zależną od ciśnienia krwi.

### 3.2 Analiza matematyczna modelu

**Twierdzenie 3.1 (Twierdzenie o położeniu równowagi modelu Zeemana)**

*Punkt  $(x_a, -x_a^3 + ax_a)$  jest położeniem równowagi układu (3.1).*

DOWÓD. Szukając punktów stacjonarnych szukamy punktów spełniających warunek o zerowaniu się pierwszych pochodnych. Taki warunek jest równoważny z zapisem

$$\begin{cases} \dot{x} = x_a \\ \dot{b} = -x_a^3 + ax_a. \end{cases}$$

To oznacza, że szukanym punktem jest  $(x_a, -x_a^3 + ax_a)$ .  $\square$

**Twierdzenie 3.2 (Twierdzenie o stabilności)**

*Punkt stacjonarny  $(x_a, -x_a^3 + ax_a)$  układu (3.1) jest stabilny dla  $x_a > \sqrt{\frac{a}{3}}$  i niestabilny dla  $x_a < \sqrt{\frac{a}{3}}$ .*

DOWÓD. Zastosujemy tutaj Twierdzenie 5.1 z Dodatku matematycznego. Badając stabilność położenia  $(x_a, -x_a^3 + ax_a)$  rozważamy linearyzację w pobliżu tego punktu. Macierz linearyzacji, oznaczana dalej jako  $A$ , przedstawia się następująco:

$$\begin{pmatrix} -3 \cdot x_a^2 + a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Posłużymy się wnioskami ze wzorów Viete'a, mianowicie

$$\begin{cases} \det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \\ \operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2. \end{cases}$$

Po podstawieniu wyznaczonych wartości dostajemy

$$\begin{cases} \det A = 1 \\ \operatorname{tr} A = -3x_a^2 + a \end{cases} \longmapsto \begin{cases} \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = -3x_a^2 + a. \end{cases}$$

Skoro iloczyn wartości własnych jest dodatni to znaczy, że wartości są tego samego znaku. Żądając stabilności wymagamy, by obie wartości były ujemne. Skoro tak, to oczekujemy także

$$\lambda_1 + \lambda_2 < 0,$$

czyli

$$-3x_a^2 + a < 0.$$

Dalej mamy

$$x_a^2 > \frac{a}{3},$$

stąd

$$x_a > \sqrt{\frac{a}{3}} \quad \vee \quad x_a < -\sqrt{\frac{a}{3}}.$$

Ponieważ  $x_a$  nie może przyjmować wartości ujemnych, końcowo otrzymujemy stabilność dla  $x_a > \sqrt{\frac{a}{3}}$ .

Wymagając niestabilności możemy zapisać

$$\lambda_1 + \lambda_2 > 0,$$

co po przekształceniach daje

$$x_a < \sqrt{\frac{a}{3}},$$

zatem dla takiego zakresu parametru  $x_a$  położenie równowagi jest niestabilne.  $\square$

**Twierdzenie 3.3**

Dla  $x_a < \sqrt{\frac{a}{3}}$  model Zeemana ma dokładnie jedno rozwiązanie okresowe, które jest cyklem granicznym.

DOWÓD. Model Zeemana (3.1) możemy zapisać jednym następującym równaniem różniczkowym:

$$\epsilon \ddot{x} + (3x^2 - a)\dot{x} + (x - x_a) = 0.$$

Dla

$$u = x - x_a,$$

$$g(u) = \frac{1}{\epsilon}(3(x_a + u)^2 - a) \quad \text{oraz} \quad h(u) = \frac{u}{\epsilon}$$

powyższe równanie jest szczególnym przypadkiem równania Liénarda. Ponieważ

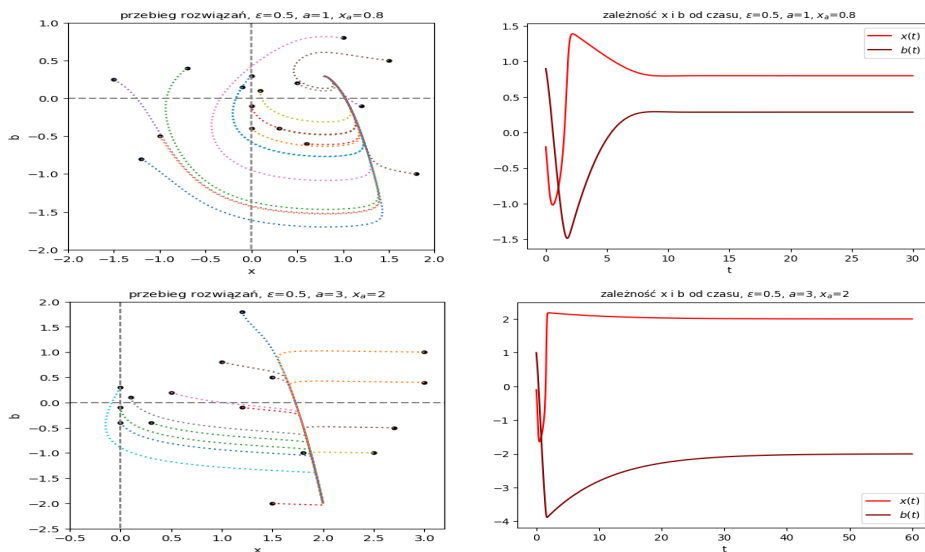
$$h(u) = \frac{u}{\epsilon}$$

jest funkcją nieparzystą,  $h(u) > 0$  dla  $u > 0$  oraz

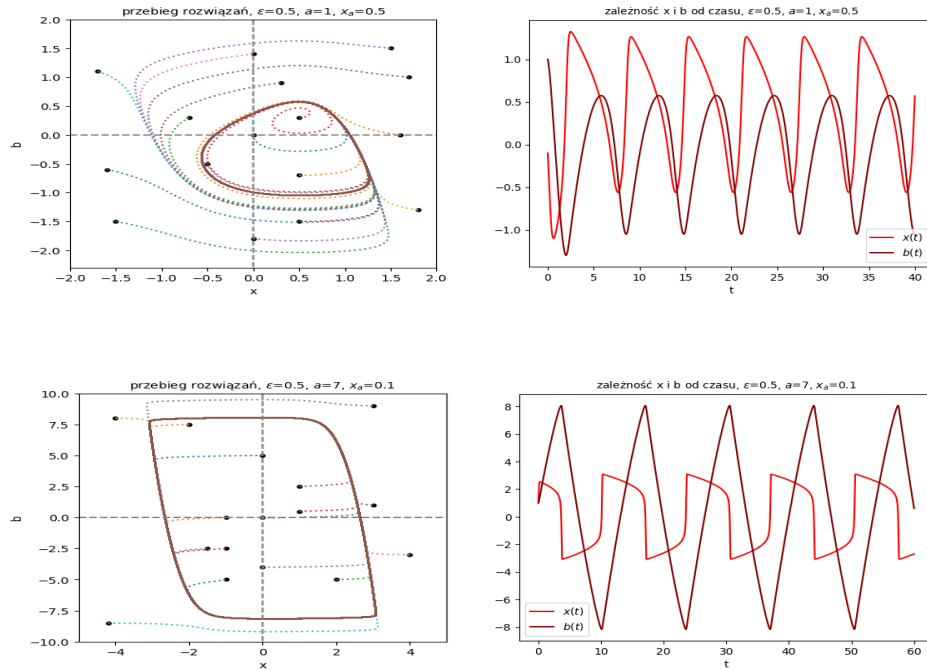
$$G(u) = \int_0^u g(s) ds = \int_0^u \frac{1}{\epsilon}(3(x_a + s)^2 - a) ds = \frac{u(-a + 3x_a^2 + 3x_a u + u^2)}{\epsilon}$$

spełnia warunki 1-3 Twierdzenia 5.3 i  $\alpha = \beta$ , otrzymujemy rozwiązanie okresowe.  $\square$

Poniższe wykresy prezentują przebieg rozwiązań układu (3.1) oraz zależność zmiennych od czasu dla różnych wartości parametrów.



Rysunek 3.1: Portrety fazowe układu (3.1) - stabilne położenie równowagi oraz zależność zmiennych od czasu. Na obu wykresach niezależnie od wyboru punktów początkowych obserwujemy stabilizację w pewnym punkcie. Zmienne wraz z upływem czasu osiągają stały poziom. Wszystkie trajektorie zbiegają do ustalonego punktu i tam kończą swój bieg. W kontekście medycznym oba obrazki relacjonują nieprawidłową pracę serca. Na lewym wykresie występuje jedynie rozkurczanie mięśnia, nie następuje powrót do fazy skurczu, co skutkuje zatrzymaniem akcji serca, a na prawym wykresie widać rozkurcz i powolny skurcz, który jest jednak zbyt słaby by zapewnić prawidłową dynamikę - nie obserwujemy bicia, tylko zatrzymanie narządu.



Rysunek 3.2: Portrety fazowe układu (3.1) - niestabilne położenie równowagi, oraz zależność zmiennych od czasu. Na obu powyższych obrazkach przedstawione są cykle graniczne obrazujące pracę serca. Na rysunku na górze widoczna jest dynamika serca z pewnego rodzaju arytmia - widać wyraźnie fazę rozkurczu oraz skurczu, które zapętłają się obrazując sensowną, choć nieregularną pracę serca. Na rysunku na dole występuje „podręcznikowy” obraz pracy serca – powolny początkowo rozkurcz, przechodzący w szybki i gwałtowny, a następnie powolny preliminarnie skurcz, którego charakter zmienia się w raptowny. Dzieje się tak dzięki działaniu mechanizmu progowego. Proces powtarza się, co biologicznie nazywamy biciem serca. Na obu wykresach zmienne wykazują charakter oscylacyjny.

### Uwaga 3.1

Przypadek  $a > (\frac{27b_1^2}{4})^{1/3}$ , gdzie  $b_1$  to próg działania bodźca, jest przykładem występowania *katastrof w sensie Thoma* opisanych w [5], konkretniej *katastrofy z ostrzem*. To znaczy, że w wyniku zmiany  $b$  w sposób ciągły następuje skokowa - nieciągła - zmiana  $x$  z jednego położenia do drugiego. Przekroczenie punktu  $b_1$  jest równoważne przesunięciu progu działania bodźca elektrochemicznego poza punkt krytyczny, czyli

$$\max(-x^3 + ax) > b_1.$$

Oznaczając

$$f(x) = -x^3 + ax,$$

następnie obliczając pochodną

$$f'(x) = -3x^2 + a,$$

i przyrównując do zera otrzymujemy ekstremum

$$x = \pm\sqrt{\frac{a}{3}}.$$



Chcąc znaleźć maksimum liczymy drugą pochodną:

$$f''(x) = -6x,$$

wstawiając do otrzymanego wzoru wyznaczone  $x = \pm\sqrt{\frac{a}{3}}$  zyskujemy, że dla  $x = \sqrt{\frac{a}{3}}$  druga pochodna jest ujemna, a zatem w punkcie tym zlokalizowane jest maksimum. Warunek ten możemy przeformułować do postaci

$$-\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right)^3 + a\sqrt{\frac{a}{3}} > b_1,$$

która po przekształceniu zwróci

$$a > \left(\frac{27b_1^2}{4}\right)^{1/3}.$$

W konsekwencji dla wyznaczonej wartości bodziec nie wyzwała skurczu gdyż jest zbyt słaby, w efekcie czego obserwujemy zaprzestanie bicia narządu, czyli niewystępowanie rozwiązań okresowych. Jednakże wywołując silne impulsy jesteśmy w stanie spowodować powrót do wartości mniejszej od  $b_1$ , a w konsekwencji do oscylacji i cyklu granicznego. Przekładając powyższe na ujęcie medyczne, z taką sytuacją możemy się spotkać gdy osoba dostaje zawału serca wskutek połączenia wysokiego ciśnienia z nagłym szokiem. Istnieje szansa na uratowanie tej osoby dzięki podaniu leków rozkurczowych bądź zastosowaniu defibrylacji, w zależności od sytuacji.

# Rozdział 4

## Model FitzHugh-Nagumo

Rozdział napisany w oparciu o [3] oraz [4].

### 4.1 Wprowadzenie do modelu

Model FitzHugh-Nagumo jest najpopularniejszym uproszczeniem modelu Hodgkina-Huxely'a opisującego sposób, w jaki potencjały czynnościowe, czyli impulsy elektryczne w neuronach są inicjowane i propagowane. Model FitzHugh-Nagumo po raz pierwszy został użyty do opisanego przewodzenia impulsów elektrycznych wzdłuż włókna nerwowego. Można go zapisać układem dwóch równań różniczkowych:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = f(v) - w + I_a \\ \frac{dw}{dt} = bv - \gamma w, \end{cases} \quad (4.1)$$

przy czym  $f(v) = v(a - v)(v - 1)$  jest funkcją klasycznego sześciennego kształtu, będącą wielomianem trzeciego stopnia, natomiast  $a, b, \gamma$  są stałymi takimi, że  $0 < a < 1$ ,  $b > 0$ ,  $\gamma > 0$ .  $I_a$  jest dodatnią stałą, opisującą prąd przyłożony z zewnątrz. Zmienna  $v$  w tym modelu odpowiada potencjałowi membrany, czyli różnicy ładunków elektrycznych w błonie komórkowej, natomiast zmienna  $w$  reprezentuje wpływ różnych potencjałów chemicznych generowanych przez jony. Konkretniej, odgrywa ona rolę kombinacji trzech prawdopodobieństw z zakresu od 0 do 1, związanych z aktywacją podjednostek kanału potasowego, aktywacją podjednostek kanału sodowego oraz inaktywacją podjednostki kanału sodowego. Dlaczego akurat potas i sód? Dlatego, że prąd płynący z zewnątrz do wnętrza komórki jest przenoszony niemal wyłącznie przez jony sodu, a prąd płynący z wnętrza na zewnątrz komórki jest w przeważającym stopniu przenoszony przez jony potasu.

### 4.2 Analiza matematyczna modelu

Podstawowym aspektem analizy matematycznej modelu jest zbadanie rozwiązań układu - najpierw istnienie a następnie stabilność. W celu znalezienia rozwiązań należy

prawę strony równań układu (4.1) przyrównać do 0.

$$\begin{cases} f(v) - w + I_a = 0 \\ bv - \gamma w = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Z drugiego równania odczytujemy, że rozwiązaniem jest prosta

$$w = \frac{b}{\gamma}v.$$

Po wstawieniu do pierwszego równania dostajemy

$$v(a - v)(v - 1) - \frac{b}{\gamma}v + I_a = 0,$$

przy czym  $a, b, \gamma$  są ustalonymi stałymi.

#### **Twierdzenie 4.1 (Wartość krytyczna $I_a$ )**

*Dla równania*

$$v(a - v)(v - 1) - \frac{b}{\gamma}v + I_a = 0$$

*zawsze istnieje jedno rozwiązanie rzeczywiste. Ponadto istnieją stałe  $A < B$  takie, że dla każdego  $I_a \in [A, B]$  równanie ma trzy rozwiązania rzeczywiste.*

DOWÓD.

$$W(v) = v(a - v)(v - 1) - \frac{b}{\gamma}v + I_a$$

jest wielomianem trzeciego stopnia, w konsekwencji ma zawsze jedno rozwiązanie rzeczywiste, co wynika z faktu, że

$$\lim_{v \rightarrow \pm\infty} W(v) = \pm\infty$$

oraz z własności Darboux.

W celu pokazania trzech rozwiązań równania dla pewnego zakresu parametrów  $A < B$  rozważmy funkcję

$$g(v) = v(a - v)(v - 1) - \frac{b}{\gamma}v$$

wraz z jej pochodną

$$g'(v) = -3v^2 + 2v(a + 1) - \left(a + \frac{b}{\gamma}\right).$$

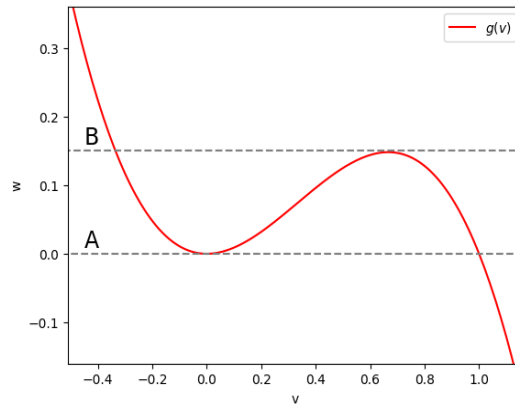
Dla  $a, b, \gamma$  spełniających warunek  $\Delta > 0$ , czyli

$$4(a + 1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot \left(a + \frac{b}{\gamma}\right) > 0$$

$g'(v)$  ma dwa miejsca zerowe

$$v_{1,2} = \frac{-2(a + 1) \pm \sqrt{4(a + 1)^2 - 12\left(a + \frac{b}{\gamma}\right)}}{-6},$$

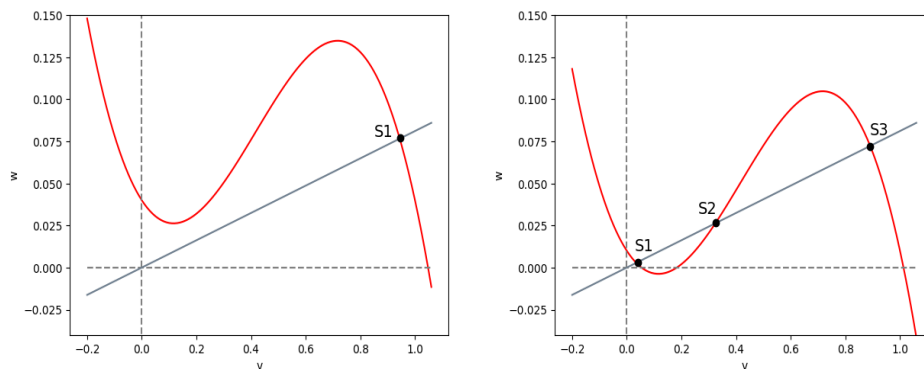
w których funkcja  $g(v)$  osiąga lokalne minimum i lokalne maksimum. Wielkości  $A$  oraz  $B$  są wartościami funkcji w wyznaczonych miejscach zerowych, czyli są wartościami lokalnego minimum i lokalnego maksimum. W związku z powyższym, wykres funkcji  $g(v)$  ma kształt zgodny z rysunkiem (4.1), a zatem dla każdego  $I_a \in [A, B]$  rozważane równanie ma trzy rozwiązania rzeczywiste.



Rysunek 4.1: Wykres  $g(v)$  i przedział  $[A, B]$ , dla którego istnieją 3 rozwiązania.

□

Przy ustalonych  $a, b, \gamma$  zmiana wartości parametru  $I_a$  odpowiada zmianie wysokości krzywej na osi pionowej - im większe  $I_a$  tym wyżej znajdzie się krzywa. Tym samym, możemy zilustrować dwie sytuacje różniące się liczbą stanów stacjonarnych.



Rysunek 4.2: Wykresy krzywych opisanych układem (4.2) dla różnych  $I_a > 0$ . Rysunki przedstawiają izokliny modelu (4.1). Na pierwszym obrazku  $I_a$  znajduje się poza przedziałem  $[A, B]$  co skutkuje jednym stanem stacjonarnym. Warto zauważyć, że możliwe są dwie sytuacje:  $I_a > B$  lub  $I_a < A$ , czyli zbyt duża bądź zbyt mała wartość prądu pochodzącego z zewnątrz, różniące się położeniem stanu stacjonarnego. Na obrazku drugim  $I_a$  należy do wspomnianego przedziału, dlatego też obserwujemy trzy stany stacjonarne.

#### Twierdzenie 4.2 (Stabilność stanów stacjonarnych)

W układzie (4.1) rozwiązania stacjonarne  $S_1$  oraz  $S_3$  są stabilne, natomiast rozwiązanie stacjonarne  $S_2$  jest niestabilne.

DOWÓD. Rozważmy linearyzację w pobliżu punktu  $(v^*, w^*)$ . Macierz linearyzacji w tym punkcie można zapisać jako

$$A = \begin{pmatrix} f'(v^*) & -1 \\ b & -\gamma \end{pmatrix}.$$

Zauważmy, że

$$\text{tr}(A) = f'(v^*) - \gamma$$

oraz

$$\det(A) = -\gamma f'(v^*) + b = \gamma \left(-f'(v^*) + \frac{b}{\gamma}\right).$$

By pokazać stabilność stanu stacjonarnego  $S_1$ , należy pokazać, że ślad i wyznacznik macierzy linearyzacji w punkcie  $S_1$  są odpowiednio ujemny i dodatni. Zauważmy, że pochodna w okolicy punktu  $S_1$  maleje, czyli  $f'(v^*) < 0$ , a co za tym idzie  $\text{tr}(A) < 0$ . By wyznacznik był dodatni, chcemy by

$$-f'(v^*) + \frac{b}{\gamma} > 0,$$

czyli

$$\frac{b}{\gamma} > f'(v^*).$$

Nierówność jest spełniona, ponieważ lewa strona jest dodatnia, a prawa ujemna. Na tej podstawie wnioskujemy, że  $S_1$  jest rozwiązaniem stabilnym.

W celu udowodnienia niestabilności rozwiązania  $S_2$  pokażemy, że wyznacznik macierzy linearyzacji w punkcie  $S_2$  jest ujemny. Aby tak było, musi zachodzić

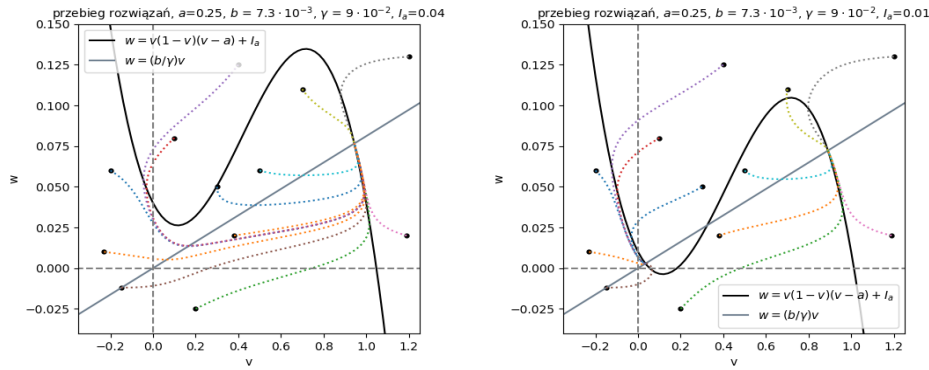
$$\frac{b}{\gamma} < f'(v^*).$$

Nierówność ta jest spełniona, co widać na wykresie (4.1).

Stabilność stanu  $S_3$  pokazujemy analogicznie do stabilności stanu  $S_1$ . Ślad macierzy linearyzacji w punkcie  $S_3$  jest ujemny z uwagi na fakt, że pochodna w punkcie  $S_3$  maleje. Skoro  $f'(v^*) < 0$ , a ponadto  $\frac{b}{\gamma} > 0$ , to zachodzi  $\det(A) > 0$ , co implikuje stabilność rozwiązania  $S_3$ .  $\square$

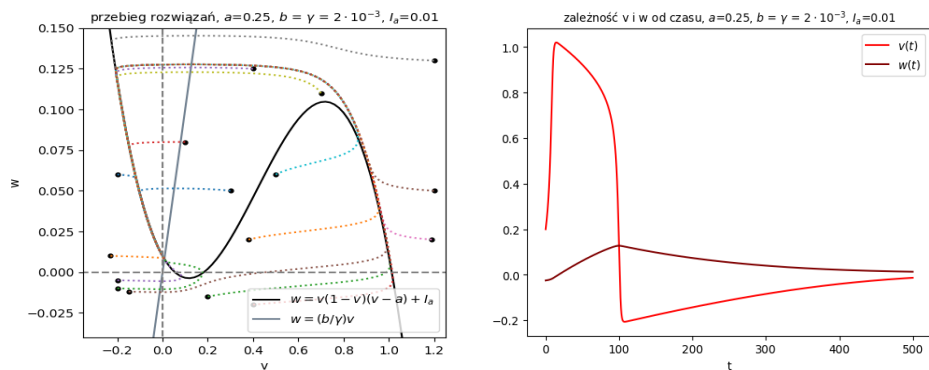
### 4.3 Rozwiązania okresowe układu FitzHugh-Nagumo

W celu pokazania rozwiązań okresowych wykonane zostały symulacje numeryczne. Poniżej obrazki ilustrujące przebieg rozwiązań układu (4.1) w przypadku jednego punktu stacjonarnego znajdującego się na prawej części krzywej  $v(1-v)(v-a) + I_a$  i w przypadku trzech punktów stacjonarnych.



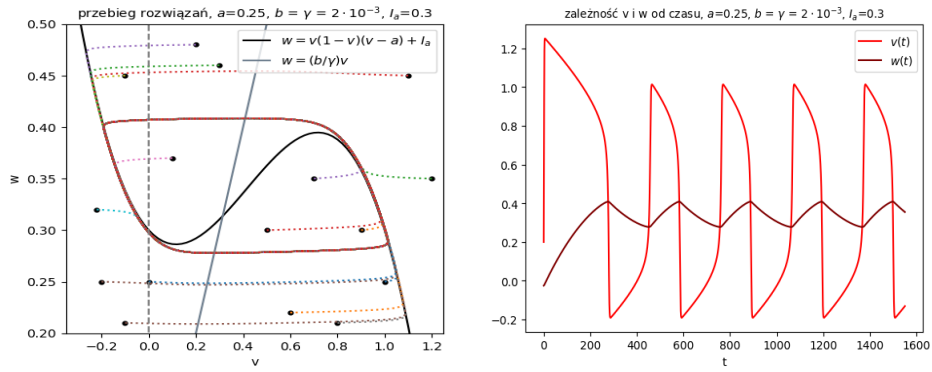
Rysunek 4.3: Przebieg rozwiązań układu (4.1) dla różnych punktów początkowych. Na wykresie pierwszym wszystkie rozwiązania zbiegają do jedynego punktu stacjonarnego, co pokazuje jego stabilność. Na wykresie drugim tylko dwa z trzech punktów stacjonarnych są stabilne, gdyż niezależnie od wyboru punktu początkowego, trajektorie nie zbiegają do punktu  $S_2$ , a są przyciągane przez  $S_1$  i  $S_3$ .

Zauważmy, że możliwe jest również pojawienie się stanu stacjonarnego na lewej części krzywej  $v(1-v)(v-a) + I_a$ . Położenie równowagi jest wtedy stabilne.



Rysunek 4.4: Trajektorie rozwiązań i zależność zmiennych od czasu dla przypadku, gdy punkt stacjonarny znajduje się na lewej części krzywej. Rozwiązania zbiegają do punktu stacjonarnego, ale pokonując najpierw okrężną drogę. Wraz z upływem czasu obie zmienne stabilizują się na stałym poziomie, ale najpierw wykazując pokonanie pewnej okrężnej drogi.

Możliwa jest jeszcze jedna sytuacja, mianowicie gdy stan stacjonarny pojawi się w środkowej części krzywej  $v(1-v)(v-a) + I_a$ . Wówczas stan stacjonarny jest niestabilny i wystąpią rozwiązania okresowe.



Rysunek 4.5: Trajektorie rozwiązań dla różnych punktów początkowych oraz zależność zmiennych od czasu. Niezależnie od wyboru punktu początkowego obserwujemy cykl graniczny. Doskonale widać to także na wykresie po prawej stronie, gdzie żadna ze zmiennych nie stabilizuje się, a wykazuje zachowanie powtarzające się, oscylujące.

# Rozdział 5

## Dodatek matematyczny

Rozdział napisany w oparciu o [1] oraz [2].

### 5.1 Teoria linearyzacji

Rozważmy równanie

$$\dot{x} = Ax + g(x), \quad (5.1)$$

gdzie

$$A \in M_{n \times n},$$

oraz

$$g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{pmatrix}$$

przyjmuje bardzo małe wartości w porównaniu z  $x$  i zeruje się dla  $x = 0$ . Naszym celem jest określenie stabilności rozwiązania tegoż równania, co może wydawać się to trudne, gdyż nie potrafimy jawnie rozwiązać tego układu. Jednakże gdy  $x$  jest bardzo mały, to  $g(x)$  jest bardzo mały w porównaniu z wartościami  $Ax$ . Dlatego prawdopodobnym wydaje się stwierdzenie, że stabilność stanu stacjonarnego  $x(t) \equiv 0$  rozważanego układu powinna być determinowana przez stabilność „przybliżonego” układu

$$\dot{x} = Ax.$$

Podejście to formalizuje poniższe twierdzenie.

#### **Twierdzenie 5.1 ([2], str. 384)**

*Załóżmy, że funkcja wektorowa*

$$g(x)/\|x\| \equiv g(x)/\max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$$

*jest funkcją ciągłą zmiennych  $x_1, \dots, x_n$ , która zeruje się dla  $x = 0$ . Wówczas:*

1. *Rozwiązanie  $x(t) \equiv 0$  układu (5.1) jest asymptotycznie stabilne jeśli wszystkie wartości własne macierzy  $A$  mają ujemną część rzeczywistą.*



2. Rozwiązanie stacjonarne  $x(t) \equiv 0$  równania (5.1) jest niestabilne jeśli chociaż jedna z wartości własnych macierzy  $A$  ma dodatnią część rzeczywistą.

### Uwaga 5.1

Stabilność rozwiązania stacjonarnego  $x(t) \equiv 0$  równania (5.1) nie może być determinowana na podstawie stabilności rozwiązania stacjonarnego  $x(t) \equiv 0$  równania  $\dot{x} = Ax$  jeśli wszystkie wartości własne macierzy  $A$  mają część rzeczywistą  $\leq 0$  ale przynajmniej jedna wartość własna macierzy  $A$  ma zerową część rzeczywistą.

## 5.2 Lemat - kryterium na stabilność

### Lemat 5.1 (Kryterium na stabilność rozwiązań)

Rozważmy macierz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

i jej wartości własne  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ .

Jeżeli  $\text{tr}(A) < 0$  oraz  $\det(A) > 0$ , to obie wartości własne  $\lambda_{1,2}$  mają ujemną część rzeczywistą, co skutkuje stabilnością rozwiązania.

Jeżeli  $\text{tr}(A) > 0$  lub jeżeli  $\det(A) < 0$ , to przynajmniej jedna wartość własna ma dodatnią część rzeczywistą, co pociąga za sobą niestabilność rozwiązania.

DOWÓD. Wielomian charakterystyczny macierzy  $A$  to

$$\chi^2(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda(a + d) + (ad - bc) = \lambda^2 - \lambda \text{tr}A + \det A,$$

a wartości własne mają postać

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a + d) \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}}{2} = \frac{\text{tr}A \pm \sqrt{(\text{tr}A)^2 - 4\det A}}{2}.$$

Jak wiadomo, stabilność rozwiązań rozstrzygamy na podstawie znaków wartości własnych, przy czym wartości własne w zależności od delty będą rzeczywiste lub zespolone. Do badania stabilności analizujemy jedynie część rzeczywistą pierwiastków. Dlaczego? Ponieważ współczynnik  $\alpha$  odpowiadający części rzeczywistej kontroluje oddalanie bądź zbliżanie do ośrodka układu, natomiast współczynnik  $\beta$  związany z częścią urojoną odpowiada za kierunek obrotu, dlatego przy badaniu stabilności nie musi być brany pod uwagę.

1. Przypadek  $\text{tr}A < 0$  i  $\det A > 0$ :

- $\Delta < 0$ :

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{tr}A \pm \sqrt{\Delta}}{2} \rightarrow \text{Re}(\lambda_{1,2}) < 0.$$

Z uwagi na to, że  $\sqrt{\Delta} \in \mathbb{C}$ , fragment ten nie wpływa na część rzeczywistą. Część rzeczywista zależy w tym przypadku tylko od  $\text{tr}A$ , który jak wiemy jest ujemny. Co za tym idzie, obie wartości własne mają ujemną część rzeczywistą, co skutkuje stabilnością rozwiązania.

- $\Delta \geq 0$ :

$$\lambda_1 = \frac{\operatorname{tr} A + \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{\operatorname{tr} A - \sqrt{\Delta}}{2} \rightarrow \operatorname{Re}(\lambda_2) < 0.$$

Z uwagi na nieujemność delty część zespolona  $\lambda_{1,2}$  jest zerowa, więc  $\sqrt{\Delta}$  istotnie wpływa na część rzeczywistą rozwiązania. W przypadku  $\lambda_2$  od ujemnej wartości odejmujemy nieujemną, zatem wynik jest ujemny. Jeżeli chodzi o  $\lambda_1$  na tym etapie nie mamy pewności co do jej znaku. By pokazać, że wartość faktycznie jest ujemna, musimy pokazać, że

$$\operatorname{tr} A + \sqrt{\Delta} < 0.$$

Przekształcając otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sqrt{\Delta} &< -\operatorname{tr} A, \\ \sqrt{(\operatorname{tr} A)^2 - 4\det A} &< -\operatorname{tr} A, \\ (\operatorname{tr} A)^2 - 4\det A &< (\operatorname{tr} A)^2, \\ 4\det A &> 0 \end{aligned}$$

co jest prawdą, bo założyliśmy, że  $\det A > 0$ . Zatem faktycznie obie wartości własne mają ujemną część rzeczywistą, co za tym idzie, rozwiązanie jest stabilne.

2. Przypadek  $\operatorname{tr} A > 0$ :

- $\Delta < 0$ :

$$\lambda_{1,2} = \frac{\operatorname{tr} A \pm \sqrt{\Delta}}{2} \rightarrow \operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) > 0.$$

Ponieważ  $\Delta < 0$  to  $\sqrt{\Delta}$  nie wpływa na część rzeczywistą, a z powodu dodatniości śladu macierzy  $A$  jest ona dodatnia w obu pierwiastkach, zatem rozwiązanie jest niestabilne.

- $\Delta \geq 0$ :

$$\lambda_1 = \frac{\operatorname{tr} A + \sqrt{\Delta}}{2} \rightarrow \operatorname{Re}(\lambda_1) > 0, \quad \lambda_2 = \frac{\operatorname{tr} A - \sqrt{\Delta}}{2}.$$

Znak  $\lambda_2$  nie ma znaczenia, ponieważ wystarczy, że jedna wartość własna ma dodatnią część rzeczywistą, a wtedy już rozwiązanie będzie niestabilne. Ponieważ  $\operatorname{Re}(\lambda_1) > 0$ , już mamy zapewnioną niestabilność rozwiązania bez konieczności rozstrzygania znaku  $\operatorname{Re}(\lambda_2)$ .

3. Przypadek  $\det A < 0$ :

- $\Delta < 0$ :

Przypadek ten nie jest możliwy z uwagi na założenie, że  $\det A < 0$ , czyli  $(\operatorname{tr} A)^2 - 4\det A > 0$ , czyli  $\Delta > 0$  co daje sprzeczność.

- $\Delta \geq 0$ :

$$\lambda_1 = \frac{\operatorname{tr} A + \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{\operatorname{tr} A - \sqrt{\Delta}}{2}.$$

Na część rzeczywistą wpłynie zarówno wartość śladu jak i wartość pierwiastka z delty, dlatego rozważymy dwa przypadki:

- $\operatorname{tr} A > 0$ :

$$\operatorname{Re}(\lambda_1) > 0,$$

co zapewnia niestabilność rozwiązania, bo chociaż jedna wartość własna ma dodatnią część rzeczywistą.

- $\operatorname{tr} A < 0$ :

W tym przypadku  $\lambda_2$  ma ujemną część rzeczywistą, zatem jedyna szansa na dodatniość części rzeczywistej jest w  $\lambda_1$ . Sprawdźmy, że faktycznie  $\operatorname{Re}(\lambda_1) > 0$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} A + \sqrt{\Delta} &> 0, \\ \sqrt{(\operatorname{tr} A)^2 - 4\det A} &> -\operatorname{tr} A, \\ (\operatorname{tr} A)^2 - 4\det A &> (\operatorname{tr} A)^2, \\ -4\det A &> 0 \end{aligned}$$

co jest prawdą, ponieważ z założenia  $\det A < 0$ . Pokazuje to, że rzeczywiście chociaż jedna wartość własna ma dodatnią część rzeczywistą, czyli rozwiązanie nie jest stabilne.

□

### 5.3 Trajektorie i portret fazowy

Trajektorie i portret fazowy są częścią „geometrycznej” teorii równań różniczkowych. Dla uproszczenia rozpatrzmy sytuację w  $\mathbb{R}^2$ . Rozważmy układ

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y), \end{cases} \quad (5.2)$$

gdzie  $f, g$  funkcjami klasy  $C^1$ .

#### Definicja 5.1

Niech  $(x(t), y(t))$ ,  $t \in (\alpha, \beta)$  będzie rozwiązaniem układu (5.2). **Trajektorią** lub **orbitą** układu nazywamy krzywą  $\{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : t \in (\alpha, \beta)\}$ .

#### Definicja 5.2

**Portret fazowy** to zbiór wszystkich trajektorii.

## 5.4 Twierdzenie Poincarégo-Bendixsona i równanie Liénarda

Pomimo tego, że rozwiązanie jest niestabilne, istnieją specjalne trajektorie zwane cyklami granicznymi, które charakteryzują się tym, że inne trajektorie zbiegają do nich. Formalizuje to poniższe twierdzenie.

### Twierdzenie 5.2 (Poincaré-Bendixson [2], str. 431)

Przypuśćmy, że rozwiązanie  $x = x(t), y = y(t)$  układu równań różniczkowych

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y) \quad (5.3)$$

pozostaje w ograniczonym obszarze płaszczyzny, który nie zawiera punktów stacjonarnych układu (5.3). Wówczas trajektoria rozwiązania wyznaczana jest przez ruch spiralny tworzący krzywą zamkniętą, która jest orbitą rozwiązania okresowego układu (5.3).

Dowód Twierdzenia 5.2 znajduje się w książce [1], rozdział 10.2.

### Uwaga 5.2

Twierdzenie 5.2 wykorzystuje się do dowodu twierdzenia Liénarda. By sformułować owe twierdzenie, spójrzmy ponownie na równanie prostego obwodu elektrycznego

$$\ddot{v} + \frac{R}{L}\dot{v} + \frac{1}{LC}v = 0, \quad (5.4)$$

gdzie  $R$  - oporność,  $L$  - indukcyjność,  $C$  - pojemność. W przypadku gdy zwykły rezystor substytujemy elementem o nieliniowej charakterystyce prądowo-napięciowej, równanie (5.4) przybiera postać

$$\ddot{J} + \frac{f'}{L}\dot{J} + \frac{1}{LC}J = 0. \quad (5.5)$$

Przyjmując oznaczenia  $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$ ,  $\frac{1}{L} = k$ , równanie (5.5) formułujemy jako

$$\ddot{J} + kf'\dot{J} + \omega_0^2 J = 0. \quad (5.6)$$

Równanie (5.6) jest szczególnym przypadkiem **równania Liénarda**

$$\ddot{u} + g(u)\dot{u} + h(u) = 0. \quad (5.7)$$

### Twierdzenie 5.3

Niech  $f(J)$  będzie funkcją klasy  $C^1$ , spełniającą warunki:

1.  $f(J)$  jest nieparzysta,
2.  $f(J) \rightarrow +\infty$  dla  $|J| \rightarrow +\infty$  i istnieje stała  $\beta > 0$ , taka że dla  $J > \beta$ , funkcja  $f(J)$  jest dodatnia i rośnie monotonicznie,
3.  $f(J) < 0$  dla  $0 < J < \alpha$ .

Wtedy równanie (5.6) ma rozwiązanie okresowe. Jeśli dodatkowo  $\alpha = \beta$ , to istnieje tylko jedno rozwiązanie okresowe.

**Uwaga 5.3**

Twierdzenie 5.3 jest również prawdziwe dla równania (5.7), czyli ogólnego równania Liénarda, pod warunkiem, że funkcja  $G(u) = \int_0^u g(s)ds$  spełnia założenia 1-3 tego twierdzenia, natomiast  $h(u)$  jest funkcją nieparzystą oraz  $h(u) > 0$  dla  $u > 0$ .

# Rozdział 6

## Dodatek numeryczny

### 6.1 Wybrane kody do symulacji w języku Python

Kod do symulacji portretu fazowego z rysunku 1.4.

```
1 import numpy as np
2 import math
3 import matplotlib.pyplot as plt
4
5 T = 2000
6 h = 0.01
7 k = 0.01
8 omega = 0.02*math.pi
9 omega0 = 0.31
10 E0 = 2.3
11 x10 = np.array([0.1])
12 x20 = np.array([0.5])
13 x1 = np.zeros((len(x10),int(T/h)))
14 x2 = np.zeros((len(x20),int(T/h)))
15 x1[:,0] = x10
16 x2[:,0] = x20
17
18 for i in range(0,int(T/h)-1):
19     x1[:,i+1]=x1[:,i]+h*x2[:,i]
20     x2[:,i+1]=x2[:,i]+h*(-omega0**2*x1[:,i] - 2*k*x2[:,i] +
    ↪ omega0**2*E0*math.cos(omega*i*h))
21
22 plt.plot(np.transpose(x1), np.transpose(x2), linestyle='dotted',
    ↪ color="darkgreen")
23 plt.scatter(x10, x20, s=12, marker="o", color="black")
24 plt.xlabel('$x_1$')
25 plt.ylabel('$x_2$')
26 plt.title("przebieg rozwiązań, $k=0.01$, $\omega=0.06$,
    ↪ $\omega_0=0.31$, $E_0=2.3$", fontsize=10)
```

```
27 plt.show()
```

Kod do symulacji przebiegu zależności zmiennych od czasu z rysunku 1.6.

```
1 import numpy as np
2 import math
3 import matplotlib.pyplot as plt
4
5 T = 405
6 h = 0.01
7 t = np.arange(0,T,h)
8 x1 = np.zeros(int(T/h))
9 x2 = np.zeros(int(T/h))
10 x1[0]=1
11 x2[0]=1
12 k = 0
13 omega = 0.02*math.pi
14 omega0 = 0.31
15 E0 = 2.3
16
17 for i in range(0,int(T/h)-1):
18     x1[i+1]=x1[i]+h*x2[i]
19     x2[i+1]=x2[i]+h*(-omega0**2*x1[i] - 2*k*x2[i] +
20         ↪ omega0**2*E0*math.cos(omega*i*h))
21
22 plt.plot(t, x1, label="$x_1(t)$", color="red")
23 plt.plot(t, x2, label="$x_2(t)$", color="maroon")
24 plt.xlabel('t')
25 plt.title("zależność $x_1$ i $x_2$ od czasu, $k=0$, $\omega=0.06$,
26     ↪ $\omega_0=0.31$, $E_0=2.3$", fontsize=10)
27 plt.legend()
```

Kod do symulacji portretu fazowego z rysunku 3.2.

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 T = 1000
5 h = 0.01
6 a = 7
7 x_a = 0.1
8 x0 = np.array([0,-2,2,-1,0,1,4,3,-4,-4.2, -1,-1,0,1,-1.5,3])
9 b0 = np.array([5,7.5,-5,-2.5,-4,2.5,-3,9,8,-8.5,-5,0,0,0.5,-2.5,1])
10 y = np.arange(-T,T,2*h)
11 x = np.zeros((len(v0),int(T/h)))
12 b = np.zeros((len(w0),int(T/h)))
```

```
13 x[:,0] = x0
14 b[:,0] = b0
15
16 for i in range(0,int(T/h)-1):
17     x[:,i+1]=x[:,i]+h*((-x[:,i])**3+a*x[:,i]-b[:,i])/epsilon
18     b[:,i+1]=b[:,i]+h*(x[:,i]-x_a)
19
20 plt.plot(np.transpose(x), np.transpose(b), linestyle='dotted')
21 plt.plot(y, np.zeros(len(y)), color = "gray", linestyle='dashed')
22 plt.plot(np.zeros(len(y)), y, color = "gray", linestyle='dashed')
23 plt.scatter(x0,b0,s=12,marker="o", color="black")
24 plt.xlim([-5,5])
25 plt.ylim([-10,10])
26 plt.xlabel('x')
27 plt.ylabel('b')
28 plt.title("przebieg rozwiązań,  $\epsilon=0.5$ ,  $a=7$ ,  $x_a=0.1$ ",
    ↪ fontsize=10)
```



# Literatura

- [1] A. Palczewski, *Równania różniczkowe zwyczajne*, 2017.
- [2] M. Braun, *Differential Equations and Their Applications 3rd Edition*, 1982.
- [3] J. D. Murray, *Mathematical Biology: I. An Introduction, Third Edition*, 2002.
- [4] J. Keener, J. Sneyd, *Mathematical Physiology*, 2001.
- [5] E. C. Zeeman, *Catastrophe Theory. Selected Papers 1972-1977*, 1977.