

Opinia

o rozprawie doktorskiej magistra Sebastiana Sydora

1 Ogólna charakterystyka wyników

Rozprawa doktorska pana magistra Sebastiana Sydora nosi tytuł „Oszacowania jąder całkowych”, a poświęcona jest zagadnieniu ich zaburzenia. W języku operatorowym zagadnienie to można przedstawić następująco. Wyobraźmy sobie, iż pewien operator, powiedzmy A , posiada pewną własność. Czy własność tę posiada także $A + B$, gdzie operator B jest w jakimś sensie mały? W kontekście rozważanym przez Autora, z A i B powiązane są pewne jądra całkowe (odpowiadające rozwiązaniom podstawowym odpowiednich zagadnień Cauchy’ego), a obiektem badań jest jądro związane z $A + B$.

Jego postać jest dobrze znana: standardowo przedstawia się je jako sumę nieskończonego szeregu jąder, którego wyrazy wyrażają się pewną zależnością rekurencyjną, obejmującą oczywiście jądra pochodzące od A i B , a wyrazem zerowym jest jądro pochodzące od A (w teorii półgrup operatorów mówi się o szeregu perturbacyjnych Dysona–Phillipsa, ale twór ten występuje pod różnymi nazwami i w różnych przebraniach w wielu dziedzinach matematyki).

Główne zagadnienie brzmi: wiedząc, że pierwszy wyraz rozwinięcia szacuje się następująco:

$$K_1(s, x, A) \leq \int_A (\eta + Q(s, t)) K_0(s, x, dt dy), \quad (1)$$

gdzie A jest zbiorem mierzalnym, K_0 jest wyrazem zerowym, $\eta \in [0, 1)$ jest stałą, a $Q(\cdot, \cdot)$ jest nadaddytywną funkcją czasów s i t , niezależną od położenia x , oszacuj podobnie cały szereg. Jak pisze Autor, inspiracją był tu artykuł K. Bogdana, W. Hansena i T. Jakubowskiego ([4] w bibliografii pracy), w którym wyniki tego typu otrzymano używając sporej dawki kombinatoryki. Celem pracy

było wyjaśnienie, zrozumienie ich natury: w rozprawie dochodzi się do nich na naturalnej drodze rekurencyjnego szacowania kolejnych wyrazów szeregu jąder.

Praca ma bardzo klarowną, przemyślaną i ujmującą pod względem estetycznym strukturę. Po koniecznym wstępie, zaczyna się prologiem poświęconym nierówności Gronwalla, w którym po raz pierwszy pojawia się myśl, że to właśnie rekurencyjne szacowanie kolejnych iteracji pewnego przekształcenia całkowego jest kluczem do dowodu. Ideę tę rozwija rozdział trzeci, w którym poza warunkiem (1) zakłada się szczególną „schrödingerowską” postać zaburzenia (to znaczy jądra związanego z operatorem B). W rozdziale czwartym Autor pokazuje, że tę samą metodę zastosować można także w innych przypadkach: na przykład, gdy jądro to „działa w przód”, lub też „natychmiast” i trwa przez „mgnienie”. W każdej z tych sytuacji rozważa trzy różne warianty wyników, odpowiadające trzem różnym poziomom dostępności informacji o punktach w czasie i przestrzeni.

Z technicznego punktu widzenia, rozważania są stosunkowo proste i wymagają jedynie znajomości twierdzenia Tonnellego-Fubiniiego o zmianie kolejności całkowania w całkach wielokrotnych. Prostota ta nie powinna jednak zwodzić – nie świadczy w żadnej mierze o trywialności wyników. Problemy związane z zaburzeniami są zwykle, ze swej natury, trudne. Szczególnie, gdy operator B nie jest wcale taki „mały” – i tak jest też w sytuacjach, którym poświęcona jest rozprawa. Za bardzo prostymi rachunkami kryją się lata doświadczeń i rozwoju intuicji promotora, prof. dra hab. K. Bogdana. Zresztą cel pracy brzmiał „wyjaśnić”, a jakież wyjaśnienie jest lepsze niż proste? W istocie to jest w rozprawie najważniejsze i najbardziej intrygujące, że do ciekawych wyników dojść można w tak naturalny sposób, bez wielkiej maszyny, bez (często nienaturalnych z probabilistycznego punktu widzenia) przestrzeni Banacha, bez norm operatorów, bez krat, posługując się jedynie całkowaniem funkcji nieujemnych. A zawarte w pracy przykłady ostatecznie i dobitnie dowodzą, że mamy do czynienia w matematyką daleką od trywialnej.

Wracając do toku rozprawy: ostatni, piąty rozdział poświęcony jest dyskusji założenia o nadaddytywności funkcji Q występującej w założeniu (1). Jak się okazuje, można je opuścić, jeśli możliwe jest oszacowanie maksimum pewnego wyrażenia pochodzącego od Q ; prowadzi to do niezwykle eleganckich wyników dotyczących przypadku, gdy Q ma postać

$$Q(s, t) = g(t - s),$$

dla jakiejś funkcji wklęsłej g , i do bardzo ładnych zastosowań.

Być może warto zwrócić tu uwagę Autora na fakt, że założenie wklęsłości i dodatniości g implikuje jej podaddytywność (patrz E. Hille i R. Phillips „Functional Analysis and Semigroups”, str. 239, tw. 7.2.5). W tym sensie nierówność (5.7) leży na przeciwnym krańcu spektrum do (3.4) – bo nierówności te otrzymane zostały przy „antysymetrycznych” założeniach. W przypadku równoczesnej pod- i nadaddytywności, a więc w przypadku liniowym, stają się one tożsame.

Na zakończenie tej części recenzji wypada skomentować, nieco tylko przyrzucając oka, że zaletą rozprawy jest to, iż jest odpowiednio, jak na pracę doktorską, krótka. Te czterdzieści kilka stron porządnej matematyki przemawia do mnie lepiej niż mniej wytrawne elaboraty.

2 Język i sposób prezentacji wyników

Pisałem już wyżej, że rozprawa wyróżnia się wyjątkowo klarowną strukturą i elegancją, wręcz urokiem. Pozytywnie zaskakuje też dopracowaniem szczegółów i więcej niż poprawną angielszczyzną (w tym języku została napisana). W zalewie prac doktorskich pisanych na kolanie, którego świadkiem jesteśmy ostatnio, zasługuje to na szczególne pokreślenie i uznanie.

Znalazłem tylko trzy miejsca wymagające poprawek.

- Na stronie 19, między wzorami (3.24) i (3.25) pierwsze $\Gamma(2\beta)$ powinno zostać zamienione na $(\Gamma(\beta))^2$, a drugie – na $\Gamma(\beta)$.
- Na stronie 30, w trzeciej linijce podrozdziału 4.4, czas t powinien dwukrotnie zostać zamieniony na s (choć i tak myśl Autora jest jasna).
- Na stronie 39, zamiast „concativity” powinno być „concavity”.

3 Konkluzja

Nie mam wątpliwości, że kandydat rozwiązał w oryginalny sposób ciekawy, niebanalny problem naukowy, wykazując się przy tym wiedzą specjalistyczną uprawniającą go do ubiegania się o stopień doktora nauk matematycznych. Wyniki swoje zebrał w bardzo interesującą, pięknie skomponowaną i napisaną rozprawę.

Jestem przekonany, że p. mgr Sydor spełnił wszystkie warunki określone w artykule 13 ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym i zasługuje na stopień doktora. Chciałbym też zaproponować, by komisja rozważyła wyróżnienie jego rozprawy.


Adam Bobrowski