dr hab. Stanisław Kasjan
Wydział Matematyki i Informatyki UMK

7 września 2013 r.

# Recenzja rozprawy doktorskiej
# „Kombinatoryka asymptotycznej teorii reprezentacji grup permutacji"
# mgr. Macieja Dołęgi

Rozprawa mgr. Macieja Dołęgi zawiera wyniki trzech prac, których współautorem jest doktorant:

[DŚ12 ] M. Dołęga i P. Śniady, Asymptotics of characters of symmetric groups: structure of Kerov character polynomials. J. Combin. Theory Ser. A 119 (2012), no. 6, 1174–1193.

[DF12 ] M. Dołęga i V. Feray, On Kerov polynomials for Jack characters, arXiv:1201.1806

[DFŚ13 ] M. Dołęga, V. Feray i P. Śniady, Jack polynomials and orientability generating series of maps, arXiv:1301.6531

Artykuły te prezentowane są w rozdziałach 3, 4 i 5 odpowiednio, rozdział pierwszy jest wstępem do pracy, zaś drugi zawiera szczegółowe wprowadzenie najważniejszych pojęć. Rozprawa napisana jest w języku angielskim.

Jednym z centralnych pojęć rozprawy jest znormalizowany charakter grupy permutacji, tj. funkcja $\lambda \mapsto \mathrm{Ch}_\mu(\lambda)$ określona na zbiorze wszystkich diagramów Younga, gdzie $\mathrm{Ch}_\mu(\lambda)$ oznacza wartość charakteru odpowiadającego diagramowi $\lambda$ na (klasie sprzężoności) permutacji odpowiadającej diagramowi $\mu$, pomnożoną przez odpowiedni współczynnik normalizujący. Wprowadzenie współczynnika normalizującego pozwala na uchwycenie „asymptotyki zachowania" charakteru przy wzroście liczby pudełek diagramu $\lambda$.

Rozważana jest też deformacja $\mathrm{Ch}_\mu^{(\alpha)}(\lambda)$ wartości $\mathrm{Ch}_\mu(\lambda)$, tzw. charakter Jacka, zdefiniowany dla parametru $\alpha$ przy użyciu współczynników wielomianów Jacka.

Punktem wyjścia jest głęboki fakt, że $\mathrm{Ch}_\mu^{(\alpha)}(\lambda)$ można wyrazić jako wartość pewnych wielomianów $K_\mu^{(\alpha)}$ (wielomianów Kerova) na ciągu wolnych kumulant. Podobnie, znormalizowany charakter zależy wielomianowo od $\alpha$-anizotropowych momentów, odpowiednie wielomiany oznaczane są $L_\mu^{(\alpha)}$ (Stwierdzenie - Definicja 2.5.2). Większa część rozważań poświęcona jest współczynnikom wielomianów $K_\mu^{(\alpha)}$ i $L_\mu^{(\alpha)}$.

Rozprawa jest obszerna i treściwa. Omówię pokrótce zawartość poszczególnych rozdziałów.

Główny wynik Rozdziału 3, Twierdzenie 3.1.1, jest to opis struktury składowej jednorodnej stopnia $k+1-2g$ (względem zdefiniowanej w pracy gradacji) wielomianu Kerova

$K_k = K^{(1)}_{(k)}$. Pomijam dokładne sformułowanie tego wyniku, który na pierwszy rzut oka ma bardzo techniczny charakter, ale stanowi potwierdzenie pewnych przypuszczeń sformułowanych przez M. Lassalle'a w pracy w *Adv. Math.* 41 (2008). W dowodzie wykorzystuje się formułę Gouldena-Rattana, wyniki o współczynnikach wielomianów Kerova uzyskane przez doktoranta wraz z Ferrayem i Śniadym w pracy z *Adv. Math.* 225 (2010) oraz pewne (techniczne ale bardzo pomysłowe) rozważania dotyczące podzielności funkcji symetrycznych.

Rozdział 4 dotyczy wielomianów Kerova dla charakterów Jacka. Wśród wielu rezultatów znajdują się Stwierdzenia 4.2.7 i 4.2.9, które orzekają, że współczynniki wielomianów $L^{(\alpha)}_\mu$ są wielomianami zmiennej $\gamma = \frac{1-\alpha}{\sqrt{\alpha}}$, podane są też oszacowania stopni tych wielomianów. Fakt ten wynika z wykonanej w sekcji 4.2.3 analizy układu równań, w którym niewiadomymi są te współczynniki. Istotnym krokiem jest wyodrębnienie trójkątnego podukładu. Jest to element odróżniający tę sytuację od rozważanego przez Lassalle'a analogicznego problemu dla wielomianów Kerova. Używając tych stwierdzeń doktorant podał nowy dowód wyniku Lapointe'a i Vineta (Twierdzenie 4.1.1).

W dalszym ciągu badane są stałe strukturalne algebry funkcji $\alpha$-symetrycznych względem bazy utworzonej przez charaktery Jacka. Udowodniono (Twierdzenie 4.3.1), że stałe te są również wielomianami zmiennej $\gamma$ i podano ograniczenia ich stopni. Wyniki te zastosowano do opisu stałych strukturalnych algebry funkcji określonych na diagramach Younga ustalonego rozmiaru. W przypadkach $\alpha = 1$, $\alpha = 2$ mają one interpretacje algebraiczno - kombinatoryczne, co omówiono w sekcjach 4.3.3 i 4.3.4.

Szczegółowa analiza tych stałych w sekcji 4.3.5 pozwoliła udowodnić Stwierdzenie 4.3.9 potwierdzające pewne przypuszczenie sformułowane przez Gouldena i Jacksona (w słabszej wersji).

Wypracowane techniki umożliwiły rozwiązanie kilku otwartych problemów sformułowanych przez Matsumoto i dotyczących pewnych wielkości $\mathcal{A}^{(\alpha)}_\mu(F, n)$ wprowadzonych przez niego w *The Ramanujan J.* 26(2010). W szczególności wykazano, że jeśli stopień $\deg(F)$ funkcji symetrycznej $F$ równy jest $|\mu|$, to $\mathcal{A}^{(\alpha)}_\mu(F, n)$ nie zależy od $\alpha$ ani od $n$, jeśli zaś $\deg(F) = |\mu| + 1$, to $\mathcal{A}^{(\alpha)}_\mu(F, n)$ nie zależy od $n$.

Podrozdział 4.4 poświęcony jest jawnemu opisowi współczynników wielomianów Kerova w pewnych szczególnych przypadkach, w szczególności Twierdzenie 4.4.2 zawiera opis $K^{(\alpha)}_k$.

Ukoronowaniem tych rozważań jest część poświęcona asymptotyce charakterów Jacka, w której najważniejszymi wynikami są Prawo Wielkich Liczb (Twierdzenie 4.5.4) i Centralne Twierdzenie Graniczne (Twierdzenie 4.6.1) dla charakterów Jacka, uogólniające wynik Kerova.

Charakter nieco odmienny od pozostałych części ma Rozdział 5. Zawiera on niezwykle interesujący opis zmagań z problemem opisania struktury charakteru Jacka $\mathrm{Ch}_{\mu}^{(\alpha)}$ w postaci możliwie eleganckiej „Stanley character formula" - formuły, w której istotną rolę odgrywają wielkości $N_G(\lambda)$ mierzące ilość zanurzeń grafu dwudzielnego w diagram $\lambda$, a więc wielkości o topologiczno - kombinatorycznym charakterze. Rozdział zaczyna się od sformułowania Głównej Hipotezy 5.1.1 zawierającej domniemaną formułę na $\mathrm{Ch}_{\mu}^{(\alpha)}$ w terminach niezorientowanych map (z grubsza rzecz biorąc, niezorientowana mapa jest to graf dwudzielny narysowany na powierzchni orientowalnej lub nieorientowalnej). W formule tej występuje „waga" $\mathrm{wt}_M(\gamma)$, która ma być wielomianem zmiennej $\gamma$, zależny od mapy $M$.

Dalej zdefiniowana zostaje pewna miara nieorientowalności mapy $M$ - wielkość $\mathrm{mon}_M$. Wykazano, że w pewnych (nie wszystkich!) przypadkach $\mathrm{mon}_M$ może wystąpić w roli poszukiwanego $\mathrm{wt}_M(\gamma)$: Jest to treść Twierdzenia 5.3.1, które potwierdza Główną Hipotezę dla prostokątnych diagramów Younga. Zgadza się to także w przypadkach $\alpha \in \{2, \frac{1}{2}\}$.

Dyskutowane są też związki z innymi przypuszczeniami dotyczącymi charakterów Jacka.

Niebanalny (obliczenia wspomagane komputerowo) przykład pokazuje, że $\mathrm{mon}_M$ w roli $\mathrm{wt}_M(\gamma)$ nie sprawdza się w sytuacji ogólnej.

Rozprawa ma przeważnie charakter kombinatoryczno - algebraiczny; jest to trudna kombinatoryka a treść pracy zawiera liczne pomysłowe rozumowania. W istotny sposób stosowane są też metody teorii prawdopodobieństwa. Teoria reprezentacji jako taka pozostaje raczej w tle, punktem wyjścia badań są już zaawansowane formuły opisujące znormalizowane charaktery i charaktery Jacka.

Przedstawiona rozprawa zawiera szereg oryginalnych i trudnych rezultatów odpowiadających na aktualne pytania w zakresie asymptotycznej teorii reprezentacji. Z powyższego krótkiego omówienia wynika, że zaproponowane podejście do kombinatoryki wielomianów Kerova i charakterów Jacka jest owocne: pozwala rozwiązać wiele problemów otwartych sformułowanych przez innych matematyków, pozwala także podać nowe dowody faktów znanych.

Rozprawa świadczy o dużej wiedzy autora w zakresie teorii prawdopodobieństwa i kombinatoryki oraz o jego predyspozycjach do pracy badawczej. Widać, że jest on aktywnym badaczem zaangażowanym w dynamiczny rozwój asymptotycznej teorii reprezentacji. Potwierdza to też życiorys naukowy doktoranta.

Praca ma wysoką wartość naukową i zasługuje na wyróżnienie.

Autor wykazał się też umiejętnościami warsztatowymi w opanowaniu skomplikowanych obliczeń i oznaczeń, w tym umiejętnością eleganckiego radzenia sobie z różnorodnością konwencji i oznaczeń stosowanych w literaturze. Potrafi także przystępnie redagować trudny tekst matematyczny, co widać zwłaszcza w niektórych częściach rozprawy, np.

Rozdziałach 2 i 5.

Tej ostatniej umiejętności nie wykorzystał wprawdzie w pełni. Zdarzają się fragmenty trudne do prześledzenia, które niewielkim kosztem dałoby się pewnie uczynić bardziej komunikatywnymi. Oto subiektywny wybór takich przykładów: wyprowadzenie formuły poprzedzającej 3.1.9, redakcja dowodu indukcyjnego Twierdzenia 4.4.1., brak objaśnienia (takiego jak np. w [GR07]) sposobu stosowania symbolu operatora $D$ na str. 35.

Obszerna praca napisana jest starannie. Zauważyłem kilka błędów literowych o znikomym znaczeniu (choć brak jednego symbolu "!" w definicji $u_\mu$ na str. 37 utrudnia śledzenie obliczeń).

**Podsumowanie.** Rozprawa doktorska „Kombinatoryka asymptotycznej teorii reprezentacji grup permutacji" mgr. Macieja Dołęgi spełnia i przekracza ustawowe i zwyczajowe wymogi stawiane rozprawom doktorskim. Wnoszę o przyjęcie rozprawy i dopuszczenie mgr. Macieja Dołęgi do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Ponadto wnoszę o wyróżnienie rozprawy.

Stanisław Kasjan