prof. dr hab. Piotr Zakrzewski
Instytut Matematyki
Uniwersytetu Warszawskiego
ul. Banacha 2
02-097 Warszawa

Warszawa, 25.09.2014 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej mgra Wojciecha Stadnickiego:
„Aksjomatyzacja modelu Mathiasa
w terminach teorii gier"

Metoda forsingu (ang.*forcing*), stworzona i użyta przez P. J. Cohena w 1963 roku do pokazania, że hipoteza kontinuum nie wynika z powszechnie przyjętych aksjomatów, od ponad 50 lat należy do najważniejszych narzędzi współczesnej teorii mnogości. Z jej pomocą udowodniono, że aksjomaty teorii mnogości nie rozstrzygają również wielu innych hipotez. Tego rodzaju dowody polegają zazwyczaj na konstrukcji odpowiednich modeli za pomocą zaawansowanych technik forsingu iterowanego. Niektóre z tych modeli zyskały status testowych uniwersów teorii mnogości, w których w pierwszym rzędzie sprawdza się spełnialność badanych hipotez. Jednym z nich jest model Mathiasa, otrzymany w wyniku iteracji długości ω_2 (z przeliczalnymi nośnikami) forsingu Mathiasa.

Problemem naukowym, którego rozwiązaniu poświęcona jest większość rozprawy doktorskiej magistra Wojciecha Stadnickiego, jest znalezienie aksjomatyzacji modelu Mathiasa. Dokładniej, chodzi o sformułowanie w języku deskryptywnej teorii mnogości takiego zestawu własności tego modelu, z których dałoby się – już bez pomocy zaawansowanych technik forsingowych – wywnioskować możliwie dużo zdań w nim prawdziwych. Chodzi zarówno o takie zdania, których prawdziwość w modelu Mathiasa została wcześniej udowodniona (za pomocą metod forsingowych) jak też o nowe, nieznane dotąd jego własności.

Analogiczny projekt został wcześniej zrealizowany dla modelu Sacksa przez K. Ciesielskiego i J. Pawlikowskiego [*The covering property axiom, CPA. A combinatorial core of the iterated perfect set model*, Cambridge Tracts in Mathematics, 164. Cambridge University Press, Cambridge, 2004]. Wyniki tego projektu stanowiły dla autora rozprawy bezpośrednią motywację i punkt odniesienia. Aksjomaty, zaproponowane przez Stadnickiego w rozprawie, również występują pod ogólną nazwą CPA (ang. *The covering property axiom*).

Realizacja sformułowanego powyżej zadania badawczego po pierwsze wymagała zdefiniowania iteracji forsingu Mathiasa w języku σ-ideałów i deskryptywnej teorii mnogości. W rozdziale 3 (następującym po poprzedzających go wstępnych rozdziałach 1 i 2) opisane jest przejście od porządku Q_α

(iteracja forsingu Mathiasa długości α) do – równoważnego mu forcingowo – porządku P_α, który z kolei (gdy α jest przeliczalną liczbą porządkową – jest to przypadek wystarczający do sformułowania aksjomatu CPA) ma reprezentację postaci $({Q_\alpha}', \subseteq)$, gdzie ${Q_\alpha}'$ jest rodziną wszystkich borelowskich podzbiorów przestrzeni polskiej $([\omega]^\omega)^\alpha$ spoza pewnego ideału I^α. To umieszcza forcing P_α w schemacie tzw. „forsingu idealizowanego", intensywnie badanego w ostatnich latach przez J. Zapletala i pozwalającego łączyć forsing, a zwłaszcza wprowadzone przez S. Shelaha pojęcie tzw. forcingu właściwego (ang. *proper forcing*) z badaniami σ-ideałów na przestrzeniach polskich, przede wszystkim z punktu widzenia deskryptywnej teorii mnogości. Definicja porządku P_α oparta jest na ideach z bardzo trudnej pracy S. Shelaha i O. Spinasa [*The distributivity numbers of* $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{fin}$ *and its square*, Trans. Amer. Math. Soc. 325 (1999)].

W kolejnych rozdziałach rozprawy (4 – 8 oraz 9) sformułowany zostaje aksjomat CPA i cały szereg jego wersji. Aksjomaty te opisane są w języku deskryptywnej teorii mnogości (odwołanie do wspomnianego wyżej σ-ideału I^α, zbiorów i funkcji borelowskich) oraz teorii gier: CPA stwierdza – oprócz explicite wyrażonej negacji hipotezy kontinuum – że jeden z graczy nie ma w pewnej grze strategii zwycięskiej.

W przypadku każdego aksjomatu podany jest forsingowy dowód jego prawdziwości w modelu Mathiasa. Dowody te w istotny sposób wykorzystują postać i własności zdefiniowanego wcześniej forsingu P_α. Przedyskutowane są też zależności pomiędzy proponowanymi aksjomatami.

Konsekwencje CPA oraz jego wariantów obejmują cały szereg stwierdzeń, dotyczących zagadnień z różnych dziedzin matematyki, których prawdziwość w modelu Mathiasa (i w konsekwencji niesprzeczność z ZFC) była wcześniej udowodniona za pomocą metod forsingowych. Jeśli przez CPA* oznaczymy tę ze sformułowanych w rozprawie wersji aksjomatu CPA, która jest wystarczająca do przeprowadzenia danego dowodu, to konsekwencjami CPA*, wyprowadzonymi w rozprawie, są następujące fakty:

— (fakt 4.3) zbiór liczb rzeczywistych jest sumą zarówno ω_1 zbiorów miary Lebesgue'a zero jak i ω_1 zbiorów I kategorii Baire'a,
— (twierdzenie 4.5) współczynnik dystrybutywności ilorazowej algebry Boole'a regularnie otwartych podzbiorów $\mathbb{R}$ modulo ideał podzbiorów ograniczonych wynosi ω_1,
— (twierdzenie 4.7) współczynnik dystrybutywności zbioru $c_0 \setminus l^1$ wraz z porządkiem dominacji (od pewnego miejsca) wynosi ω_1,
— (fakt 5.3) współczynnik dystrybutywności ilorazowej algebry Boole'a wszystkich podzbiorów $\mathbb{N}$ modulo ideał podzbiorów skończonych jest większy od ω_1,
— (twierdzenie 5.5) żaden nieprzeliczalny zbiór $X \subseteq \mathbb{R}$ nie jest silnie miary zero, tzn. dla pewnego ciągu liczb rzeczywistych dodatnich nie da się pokryć zbioru X przedziałami otwartymi o długościach zadanych przez ten ciąg (tzn. prawdziwa jest tzw. hipoteza Borela),
— (twierdzenie 5.8) dla żadnego ultrafiltru niegłównego $\mathcal{U}$ na $\mathbb{N}$ w kontinuum $\mathbb{I}_{\mathcal{U}}$ nie istnieją dalekie punkty rozspajające,

— (twierdzenie 5.13) dla każdego ultrafiltru niegłównego $\mathcal{U}$ na $\mathbb{N}$ istnieje funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, która nie jest zdominowana przez rosnącą numerację żadnego zbioru $X \in \mathcal{U}$ (tzn. nie istnieje tzw. ultrafiltr „rapid"),
— (twierdzenie 6.6) współczynnik dystrybutywności kwadratu ilorazowej algebry Boole'a wszystkich podzbiorów $\mathbb{N}$ modulo ideał podzbiorów skończonych wynosi ω_1.
— (twierdzenie 6.9) współczynnik dystrybutywności zbioru wszystkich nieskończonych podziałów $\mathbb{N}$ z pewnym naturalnym porządkiem wynosi ω_1.

Należy podkreślić, że niektóre z oryginalnych dowodów forsingowych prawdziwości powyższych faktów w modelu Mathiasa są bardzo trudne (dotyczy to zwłaszcza twierdzenia 6.6). Natomiast fakt z teorii kontinuów (twierdzenie 5.8) nie był wcześniej dowodzony w modelu Mathiasa.

Rozdział 9 jest trochę z boku głównego nurtu rozprawy – przedstawione są w nim proste dowody własności pewnych ultrafiltrów w modelu Mathiasa.

Przystępując do oceny rozprawy mgr. Stadnickiego zacznę od stwierdzenia, że bardzo podoba mi się zasadniczy, leżący u jej źródeł pomysł, by znane modele teorii mnogości (w tym przypadku model Mathiasa) aksjomatyzować, tzn. szukać takich ich własności, sformułowanych np. w języku deskryptywnej teorii mnogości, które by te modele w możliwie pełny sposób opisywały. Tacy matematycy, do jakich sam się zaliczam, którzy wolą nie wykorzystywać bezpośrednio technik forsingowych, mogą używać aksjomatów typu CPA w podobny sposób w jaki powszechnie stosowany jest znany aksjomat Martina lub inne tak zwane aksjomaty forsingowe.

Zadanie badawcze, postawione przed autorem rozprawy, zostało bardzo rzetelnie zrealizowane. Jego realizacja wymagała świetnej znajomości różnorodnych technik współczesnej teorii mnogości (forsing iterowany, forsing właściwy, podmodele elementarne, forcing idealizowany), zrozumienia trudnych prac i twórczego wykorzystania ich wyników a także orientacji w wielu zagadnieniach teorii mnogości oraz innych dziedzin matematyki, w których pojawiają się problemy wrażliwe na aksjomatykę. Ten ostatni aspekt dobrze ilustruje przytoczona powyżej lista konsekwencji CPA*. Należy też podkreślić, że ich dowody na gruncie CPA* są istotnie łatwiejsze niż pierwotne, forsingowe dowody ich prawdziwości w modelu Mathiasa.

W tym miejscu podzielę się jednak pewnym niedosytem. W rozdziale 1.1 rozprawy mgr Stadnicki przypomina, że aksjomat CPA Ciesielskiego i Pawlikowskiego pozwala wyeliminować forsing z dowodów wielu własności modelu Sacksa, zastępując go rozumowaniami na gruncie deskryptywnej teorii mnogości. Odniosłem wrażenie, że autor sugeruje, że podobny efekt uda mu się osiągnąć za pomocą własnych aksjomatów CPA* w odniesieniu do modelu Mathiasa. Istotnie, twierdzenia typu „z CPA* wynika dane zdanie" mają postać implikacji w ZFC. Wszystkie ich zaprezentowane w rozprawie dowody nadal jednak w istotny sposób korzystają z aparatu pojęciowego forcingu. Jest to istotna różnica w stosunku do monografii Ciesielskiego i Pawlikowskiego, gdzie dana we wstępie obietnica, że jej lektura nie wymaga znajomości forcingu, została dotrzymana. Narzucają się więc pytania, czy możliwe byłoby zapisanie dowodów wnioskowań z CPA* bez odwołań do forcingu oraz czy takie ich przedstawienie byłoby potrzebne.

Wydaje mi się, że mamy tu do czynienia z pewną „barierą kulturową". Z jednej strony, specjaliści od forsingu mogą nie widzieć sensu w całkowitym eliminowaniu go z argumentów, gdyż może to wydłużyć dowody, nie wnosząc, w sensie ich zawartości matematycznej, niczego nowego. Z drugiej strony, z punktu widzenia matematyków nieznających wystarczająco forsingu, argumenty używające go są niezrozumiałe. Zachętą do testowania hipotez, mających szansę zachodzić w modelu Mathiasa, mogłoby dla nich stać się właśnie pokazanie – choćby na kilku przykładach – że z CPA* rzeczywiście daje się coś wywnioskować bez użycia forsingu.

Powyższe uwagi mają bardziej charakter polemicznej refleksji niż krytyki i nie wpływają na moją wysoką ocenę rozprawy, zarówno pod względem merytorycznym (skala i trudność zrealizowanego projektu badawczego robią duże wrażenie) jak i redakcyjnym (liczba dostrzeżonych przeze mnie literówek, potknięć redakcyjnych bądź językowych jest niewielka).

Rozprawa mgra Wojciecha Stadnickiego „Aksjomatyzacja modelu Mathiasa w terminach teorii gier" stanowi oryginalne rozwiązanie problemu naukowego a także wykazuje ogólną wiedzę teoretyczną jej autora oraz umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej. W mojej ocenie z pewnością spełnia ona ustawowe i zwyczajowe warunki stawiane rozprawom doktorskim.

Wnoszę o dopuszczenie mgra Stadnickiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego. Wnoszę też o wyróżnienie jego rozprawy (biorąc pod uwagę trzynaście rozpraw doktorskich, w tym co najmniej cztery wyróżnione, które oceniałem jako promotor (4) lub recenzent (9)).

Zakrzewski

Piotr Zakrzewski