Prof. dr hab. Tomasz Byczkowski
Instytut Matematyczny PAN
Oddział we Wrocławiu

Wrocław, 28. III. 2014 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Sebastiana Sydora
"Oszacowania jąder całkowych"

Rozprawa doktorska mgr Sebastiana Sydora dotyczy *problematyki perturbacyjnej* związanej z *operatorami Schrödingera*. Klasyczny wynik w ogólnym kontekście *półgrupowym* precyzuje warunki dostateczne na to, aby suma *generatora* półgrupy i zaburzenia poprzez pewien operator była dalej generatorem pewnej półgrupy oraz podaje postać szeregową (*szereg von Neumanna*) otrzymanego w ten sposób generatora nowej półgrupy.
Jeśli mamy do czynienia z półgrupami *Feynmanna-Kaca* to zaburzenie przyjmuje postać mnożenia przez pewną funkcję i zachodzi potrzeba ustalenia warunków nakładanych na funkcję, zapewniających odpowiednią regularność otrzymanego operatora Schrödingera. Najbardziej znane warunki tego typu dotyczą tzw. *klasy Kato*.
Generalnie chodzi tutaj o zapewnienie odpowiedniej małości funkcji zaburzającej (*potencjału q*) w porównaniu z prawdopodobieństwami przejścia rozważanej półgrupy probabilistycznej. W rozprawie rozważa się rozmaite warianty tego schematu; zaproponowana technika jest tak uniwersalna, że pozwala na badanie ogólniejszych obiektów niż półgrupy, a mianowicie *ciągów jąder całkowych*, zaburzonych przez potencjał q. W pobieżnym omówieniu treści rozprawy, ze względu na prostszą interpretację otrzymanych rezultatów, ograniczymy się jednak do przypadku półgrupowego.
Podstawowy i nowatorski pomysł, wcielony w życie przez grupę badawczą kierowaną przez prof. Bogdana, sprowadza się do przeprowadzenia najpierw w miarę jawnej konstrukcji gęstości funkcji przejścia ("*transition density*") (ogólniej: *jądra całkowego* zaburzonego potencjałem lub jądrem q) rozważanej półgrupy Feynmanna-Kaca (za pomocą odpowiedniego szeregu), a dopiero w dalszej kolejności do odpowiednich oszacowań otrzymanej w ten sposób gęstości. Jeśli potencjał q spełnia pewne warunki majoryzowania względem prawdopodobieństw przejścia wyjściowej półgrupy, to w tezie otrzymujemy bardzo eleganckie wzory na oszacowanie gęstości prawdopodobieństw przejścia otrzymanej półgrupy Feynmanna-Kaca. Istotnie nowym elementem jest nałożenie

odpowiedniego warunku typu oszacowania z góry pierwszego członu szeregu, a następnie otrzymanie precyzyjnych oszacowań za pomocą indukcji, pozostałych członów szeregu perturbacyjnego, a w konsekwencji także całego szeregu (więc gęstości funkcji przejścia).
Tego rodzaju oszacowanie z góry zawiera nie tylko odpowiednio małą stałą $\eta \geq 0$ ale także pewną funkcję super-addytywną Q(s,t) (np. Q(s,t) = t-s). W tezie otrzymujemy oszacowanie gęstości prawdopodobieństwa przejścia typu potęgowego, a przy $\eta < 1$ wykładniczego, dla półgrupy Feynmana-Kaca.
Główny pomysł, na którym oparta jest praca, jest zaprezentowany w rozdziale 3 rozprawy w Theorem 3.1 i jest zadziwiająco elementarny i przejrzysty. Jest to bardzo pomysłowa indukcja. Jednak ta pozorna prostota jest bardzo zwodnicza: aby ta indukcja "szła" trzeba dokładnie znać tezę i musi ona być optymalna.
Wyżej wspomniany pomysł i elegancki dowód jest zwieńczeniem wielu wcześniejszych badań i pomysłów grupy badawczej prowadzonej przez prof. Bogdana a zwłaszcza dr hab. Jakubowskiego i mgr Szczypkowskiego. Pierwsze pionierskie wyniki w tym kierunku były bardzo pracochłonne i opierały się na zaawansowanej kombinatoryce. Metoda dowodu zaprezentowana w Theorem 3.1 jest nie tylko prostsza; jest także bardziej ogólna i pozwala na zastosowanie w wielu przypadkach, sukcesywnie rozważanych w następnych rozdziałach: perturbacji nielokalnych (rozdział 4) oraz gdy mamy do czynienia z słabszymi ograniczeniami na potencjał q (rozdział 5). Mocną stroną rozprawy są przykłady. Należy podkreślić, że w ogólnym przypadku nie zakłada się tożsamości Chapmana-Kołmogorowa, tzn. przedstawiona w rozprawie teoria dotyczy obiektów bardziej ogólnych niż półgrupy operatorów. Tym bardziej godne podziwu jest otrzymanie aż tak ogólnych wyników przy tak słabych ograniczeniach.
Uwagi krytyczne dotyczą jedynie strony redakcyjnej; pod względem merytorycznym nie mam zastrzeżeń. Bardziej konkretnie: rozprawa jest napisana w sposób nieco "rozwlekły"; w gruncie rzeczy opiera się na jednym podstawowym pomyśle, przedstawionym w Theorem 3.1. Zapewne można by ją zredagować w sposób bardziej zwięzły. Jednak rozpatrywanie różnych założeń na potencjał q, który może także być reprezentowany przez jądro nielokalne, w znacznym stopniu usprawiedliwia tego rodzaju prezentację. Ponadto, taki rodzaj prezentacji czyni rozprawę znacznie łatwiejszą do czytania. Jednocześnie, w sformułowaniach twierdzeń/lematów zamiast jawnego przytoczenia założeń z reguły odsyła się czytelnika do numeru wzoru zawierającego odpowiednią postać założenia co nie jest zbyt wygodne. Także pewne fragmenty zostały potraktowane w sposób zbyt zdawkowy jak na rozprawę doktorską. Odpowiednie uwagi dołączyłem w liście usterek redakcyjnych.

Powyższe zastrzeżenia nie mają wpływu na wysoką ocenę merytoryczną pracy, która moim zdaniem wnosi istotny wkład do tematyki zaburzeń schrödingerowskich i spełnia wszelkie warunki ustawowe i zwyczajowe stawiane rozprawom doktorskim. Wnoszę o dopuszczenie mgr Sebastiana Sydora do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Tomasz Byczkowski

T. Byczkowski

Lista dostrzeżonych usterek redakcyjnych, błędów językowych/"maszynowych"

1. Str 2_7: jest: „…may be consider as…"
   powinno być: „may be considered as…"
2. Str 7^5 – 7^11: zastosowanie całkowania przez części znacznie uprości przedstawiony rachunek
3. Str 12^4, 12_5 zastąpić zwrot: „…to wit…" przez „…namely.." ew. „…that is to say…", „…that means…"
4. Str 14^1 – 14^4: nieco zbyt skrótowe, wymaga nieco bardziej szczegółowych objaśnień
5. Str 17^2: zastąpić „…for the comfort…" przez „ …for convenience…" lub „…for the completeness…"
6. Str 18^11: zastąpić „…rather tight…" przez „…rather sharp…" lub „…rather precise…"
7. Str 19_7 – 17_5: przytoczone nierówności wymagają jakiegoś uzasadnienia. Np.: odwzorowanie t ---> t^{1-β} jest super-addytywne i (a∧b)+(a ∨b) = a+b
8. Str 19_2 – 19_1 : przydałaby się bardziej konkretna konkluzja co to znaczy „local comparability" w rozpatrywanym przypadku
9. Str 20^15: zastąpić: „…but if α =2…" przez „…with the exception of α =2…"
10. Str 20_10: Wydaje się, że odwołanie się do przypadku funkcji Greena i q-funkcji Greena (ew. potencjału i q-potencjału) mogłoby być dość pożyteczne
11. Str 21^12: Zastąpić „…secured…" przez „…guaranteed…" lub „…assured…"
12. Str 27^8: jest: „…similar that…"; powinno być: „…similar to that…"
13. Str 30_3: w sformułowaniu Theorem 4.4.1: dodać po „then" „for q instantaneous in time"
14. Str 32_3: jest „…requires work"; powinno być: „…requires some work"; także w ostatnim wierszu po „t>0" brakuje przecinka
15. Str 33^3: należałoby przytoczyć wzór z którego wynika powyższa własność – na podporządkowanie
16. Str 39^1: jest: „concativity"; powinno być: „concavity"
17. Str 39_11: należałoby dodać, że min(t-s,1) jest wklęsła
18. Str 40^8: Theorem 5.2.3: należy dodać, że (t-s)^{β}jest wklęsła