dr hab. Tomasz Żak
Instytut Matematyki i Informatyki
Politechnika Wrocławska

Wrocław, 20 maja 2014

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Łukasza Wojciechowskiego
Analiza stochastyczna procesów Lévy'ego

Zgodnie z tytułem, rozprawa poświęcona jest analizie stochastycznej, a dokładniej obliczaniu pewnych całek wielokrotnych związanych z procesami Lévy'ego i ich zastosowaniu do problemu mnożników fourierowskich.

W rozdziale pierwszym podane są metody obliczania całek postaci

$$\mathbb{E}\sum F(u_1, Y_{u_1-}, Y_{u_1}, ..., u_n, Y_{u_n-}, Y_{u_n}),$$

gdzie F jest funkcją nieujemną (bądź bezwzględnie całkowalną), (Y_u) procesem Lévy'ego, a sumowanie rozciąga się na momenty skoków $0 < u_1 < u_2 < ... < u_n < \infty$, tzn. tych chwil u_i, gdy $Y_{u_i} - Y_{u_i-} > 0$. Wykazuje się, że wyrażenia tego typu można zapisać w postaci całki wielokrotnej względem ν, miary Lévy'ego procesu (Y_u). Metoda jest koncepcyjnie dość prosta: ponieważ wszystkie procesy Lévy'ego są granicami uogólnionych procesów Poissona z miarami skończonymi, więc wystarczy obliczyć całki tego typu dla uogólnionych miar Poissona, a potem dokonać przejścia granicznego. Łatwo to powiedzieć, ale dużo trudniej wykonać: ponieważ miara poissonowska dla skończonego wykładnika ν jest średnią ważoną (z wagami poissonowskimi) kolejnych splotów miary ν, więc wyniki rachunków dla tych splotów muszą być na końcu zsumowane do jakiegoś wzoru zwartego. W ten sposób Autor uzyskuje wzór zwarty dla dwukrotnych systemów Lévy'ego (rachunki na stronach 9–11 dysertacji) ale wydaje się, że wzory dla całek bardziej skomplikowanych byłyby bardzo trudne do osiągnięcia tą metodą.

Na szczęście wyprowadzone wzory wystarczają do badania kompensatorów, które przekształcają procesy typu $X_t = \sum_{0<v<t} F(v, Y_{v-}, Y_v)$ w martyngały, co pozwala rozwinąć technikę, kluczową w kolejnym rozdziale, w którym badane są mnożniki fourierowskie. Jeśli $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, a funkcja $m : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, zwana symbolem, ma moduł nie większy niż jeden, to forma dwuliniowa

$$\Lambda(f,g) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} m(\xi)\hat{f}(\xi)\hat{g}(-\xi)\,d\xi$$

ma ograniczoną normę. W pracy, używając procesów Lévy'ego, konstruuje się symbole m, dla których analogiczna forma dwuliniowa jest ograniczona na wszystkich $L^p(\mathbb{R}^d)$, tzn. dla wszystkich $p \in (1, \infty)$ i wszystkich $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ zachodzi nierówność

$$(1) \qquad |\Lambda(f,g)| \leqslant \|M\|_p \|f\|_p \|g\|_q, \text{ gdzie } \|M\|_p \leqslant \max\{p-1, \frac{1}{p-1}\}, \text{ a } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Dokładniej: rozważmy proces Lévy'ego, jego wykładnik Lévy'ego-Chinczyna $\Psi(\xi)$ oraz zespolone funkcje ϕ, φ, ograniczone przez 1. Twierdzenie 3.1.1 podaje konstrukcję za pomocą funkcji $\Psi(\xi)$, ϕ, φ takiego symbolu $m(\xi)$, który zapewnia spełnienie warunku (1). W celu sprawdzenia, że zdefiniowany symbol spełnia warunek (1), wykorzystuje się twierdzenia Burkholdera – Wanga, dotyczące oszacowania norm martyngałów różniczkowalnie podporządkowanych. Martyngały, jakie tu występują, utworzone są z odpowiednio skompensowanych procesów Lévy'ego, a do obliczenia konkretnych całek używa się lematów udowodnionych w pierwszej części rozprawy. Warto zaznaczyć, że nie jest to pomysł całkowicie nowy: podobne metody były używane wcześniej, np. w pracy R. Bañuelosa i promotora tej rozprawy, ale tutaj po raz pierwszy udało się uzyskać symbole, które nie są symetryczne.

W części trzeciej rozprawa poświęcona jest obliczeniom momentów iterowanych całek względem procesów Lévy'ego. Dokładniej: w języku konfiguracji i losowych miar Poissona przedstawiony jest schemat takich obliczeń. Używam tu słowa „schemat", gdyż po udowodnieniu uogólnienia wzoru Meckego-Palma (Twierdzenie 4.2.3), w Twierdzeniu 4.3.1 Autor zapisuje w pomysłowy sposób i dowodzi dla 1–procesów wzoru, pozwalającego obliczać momenty mieszane takich procesów. Aby wspomnieć o technicznych kłopotach związanych z samym zapisem, warto zaznaczyć, że wzór dla 1–procesu jest tylko trzylinijkowy, natomiast przedstawiony schemat pozwala natychmiast napisać wzór dla 2–procesów (ten ma już 11 linijek), osoby dostatecznie cierpliwe będą mogły w myśl przedstawionej w pracy recepty napisać wzory dla 3–procesów itd. Kłopot z jawnym wypisaniem wszystkich składników polega na tym, że ich liczba w takim wzorze związana jest z liczbą możliwych przedstawień liczby naturalnej k w postaci różnych sum, a ta wielkość szybko rośnie wraz ze wzrostem k.

Wzory takie mogą być jednak bardzo pomocne: ostatnim rezultatem pracy jest wykazanie, że stosunkowo łatwym wnioskiem z teorii całkowania 1–procesów, rozwiniętej w tym rozdziale, jest wzór Ikedy-Watanabe. Opisuje on łączny rozkład momentu skoku procesu oraz punktu z którego proces skacze i w który trafia, gdy wychodzi z danego zbioru. Wzór ten okazał się bardzo przydatny w teorii potencjału procesów Lévy'ego. Być może twierdzenia o całkowanu 2–procesów dadzą nowe narzędzia do badania zachowania się trajektorii procesów Lévy'ego, ale to zapewne temat na inną rozprawę doktorską.

Pierwszy rozdział rozprawy jest rozdziałem technicznym, służącym rozwinięciu narzędzi do badania pewnych martyngałów, a za ich pomocą mnożników, których konstrukcja opisana jest w rozdziale drugim, opartym na wspólnej publikacji Doktoranta z promotorem.

Przedstawiona rozprawa zawiera dużo ciekawych i nietrywialnych wyników, dowodzonych za pomocą bardzo skomplikowanych technik rachunkowych. Tematyką całek wielokrotnych względem procesów zajmował się N. Privault, jednak jego rachunki były prowadzone za pomocą skomplikowanych metod kombinatorycznych i były mniej bezpośrednie. Z kolei problem mnożników to jeden z klasycznych problemów analizy harmonicznej, zastosowanie procesów stochastycznych w pracach Bañuelosa i Bogdana pozwoliło na użycie technik martyngałowych, jednak symbole otrzymane do tej pory były symetryczne. W przedstwionej dysertacji nietrywialne modyfikacje tych technik pozwoliły uogólnić poprzednie wyniki na klasę funkcji niesymetrycznych.

W pracy z tak skomplikowanymi wzorami i rachunkami trudno ustrzec się literówek i drobnych błędów. Nie zmniejszają one jednak wartości recenzowanej pracy, a ich listę przekazałem Autorowi.

Uważam, że przedstawiona do oceny rozprawa mgr. Łukasza Wojciechowskiego spełnia z naddatkiem wszelkie ustawowe i zwyczajowe wymogi stawiane rozprawom doktorskim i może stanowić podstawę do nadania stopnia doktora nauk matematycznych. Na tej podstawie wnoszę o dopuszczenie Doktoranta do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Tomasz Żak