rozprawa doktorska

Aksjomatyzacja modelu Mathiasa w terminach gier

Wojciech Stadnicki
promotor: prof. dr hab. Janusz Pawlikowski

Streszczenie

Przedmiotem badań zawartych w rozprawie jest jeden z najważniejszych modeli rozważanych w teorii mnogości, mianowicie model Mathiasa. Mimo że jest on otrzymany za pomocą iteracji długości ω_2 forcingu Mathiasa, w niniejszej rozprawie jego kombinatoryczne własności ujęto w języku deskryptywnej teorii mnogości. Wzorując się na aksjomacie CPA dla modelu Sacksa (zob. [2]), wprowadzono szereg aksjomatów, które coraz dokładniej odzwierciedlają kombinatoryczną strukturę rozpatrywanego modelu. Wykazano ich niesprzeczność oraz zbadano konsekwencje. W tym celu przeformułowano iterację forcingu Mathiasa, charakteryzując ją w terminach deskryptywnej teorii mnogości. Aksjomaty wyrażono przy użyciu zbiorów i funkcji borelowskich, ideałów na przestrzeniach polskich oraz gier i strategii. Opracowano w ten sposób aksjomatyzację modelu Mathiasa, która pozwala spojrzeć na jego strukturę od strony topologiczno-desktyptywnej, co znacznie ułatwia dalsze badania nad jego własnościami i prowadzi do nowych wyników. Dodatkowo uzyskano kilka wniosków dotyczących V-ultrafiltrów[1] indukowanych przez liczby rzeczywiste z modelu Mathiasa.

Rozdział 1 wprowadza do tematyki rozprawy i nakreśla tło historyczne opisanych w niej badań. Zawiera skrócony opis poszczególnych rozdziałów, uwagi o możliwości zastosowania przedstawionych narzędzi do badania innych modeli, a także podziękowania. W Rodziale 2 zebrano wstępne, z reguły powszechnie znane fakty dotyczące rozważanych pojęć. Ma to w szczególności na celu ustalenie notacji oraz interpretacji symboli czy zwrotów. W Rozdziale 3 podano deskryptywną charakteryzację iterowanego forcingu Mathiasa, przy użyciu zbiorów borelowskich i ideałów na przestrzeniach polskich. Wykorzystano w tym celu metodę zastowaną w [2], opierając się na ideach z [7].

W kolejnych rozdziałach wprowadzano poszczególne aksjomaty. W każdym przypadku wykazano, że rozpatrywany aksjomat jest spełniony w modelu Mathiasa, oraz rozważano jego konsekwencje. Rozdział 4 opisuje „podstawowy" aksjomat, CPA, analogiczny do przedstawionego w [2]. Implikuje on równość $\mathrm{cov}(\mathcal{J}) = \mathfrak{r} = \omega_1$, gdzie $\mathcal{J}$ oznacza σ-ideał zbiorów I kategorii Baire'a lub zbiorów miary zero na prostej, natomiast $\mathfrak{r}$ - dystrybutywność

[1]filtrów maksymalnych na $\mathcal{P}(\omega) \cap V$, gdzie V jest modelem wyjściowym

algebry r.o.$(\mathbb{R}^*, \subseteq^*)$ lub r.o.$(c_0\backslash\ell^1, \leq^*)$ (zob. [3], [5]). Jego wzmocnienie, sformułowany w Rozdziale 5 aksjomat CPAs, dowodzi takich własności jak:

- $\mathfrak{h} > \omega_1$, gdzie $\mathfrak{h}$ oznacza dystrybutywność algebry $(\mathcal{P}(\omega)/\operatorname{fin})$,
- Hipoteza Borela (Borel Conjecture, zob. [1]),
- brak ultrafiltrów typu „rapid" na ω (zob. [6]),
- brak dalekich punktów rozspajających $\mathbb{I}_{\mathcal{U}}$ dla $\mathcal{U} \in \omega^*$ (zob. [4]).

Ten ostatni wynik jest nową własnością modelu Mathiasa, która dotychczas znana była dla modelu Lavera (zob. [4]).

W Rozdziale 6 przedstawiono aksjomat SCPA$^-$, będący słabszą, mniej techniczną, „taktyczną" wersją aksjomatu SCPA (omówionego w Rozdziale 8). Jako wniosek z SCPA$^-$ uzyskano równość $\mathfrak{h}(2) = \omega_1$, gdzie $\mathfrak{h}(2)$ oznacza dystrybutywność algebry $(\mathcal{P}(\omega)/\operatorname{fin}) \times (\mathcal{P}(\omega)/\operatorname{fin})$. Wynik Shelaha i Spinasa z [7], mówiący, że równość ta zachodzi w modelu Mathiasa, jest główną motywacją do poszukiwania silniejszych wersji aksjomatu CPA. Ponadto SCPA$^-$ dowodzi, że dystrybutywność $((\omega)^\omega, \leq^*)$ wynosi ω_1. ($(\omega)^\omega$ to rodzina nieskończonych partycji zbioru ω, z porządkiem $X \leq^* Y$, gdy prawie wszystkie[2] elementy partycji X są sumami elementów partycji Y, zob. [8].)

Rozdział 7 poświęcony jest aksjomatowi $\Diamond$CPA, który oddaje strukturę modelu iteracyjnego związaną z aksjomatem $\Diamond$, występującym w pośrednich rozszerzeniach o kofinalności ω_1. W Rozdziale 8 opisano zależności między rozważanymi dotychczas aksjomatami oraz podano ich uogólnienia, w szczególności wspomniany aksjomat SCPA, w jego pełnej, „strategicznej" wersji, a także aksjomat $\Diamond$SCPAs, implikujący wszystkie poprzednie.

Pozostałe rozdziały należy traktować jako dodatek do głównego tematu rozprawy. W Rozdziale 9 omówiono pewne własności V-ultrafiltrów w modelu Mathiasa. W szczególności podano elementarne dowody uogólnień głównych lematów z [7]. (Rozumowania w [7] wykorzystują zaawansowane i nader techniczne narzędzia, co znacznie utrudnia ich śledzenie.) Rozdział 10 opisuje aksjomat $\Diamond$mCPA - modyfikację $\Diamond$CPA, która implikuje kombinatoryczną zasadę $\clubsuit$. Z uwagi na techniczny charakter $\Diamond$mCPA rozdział ten stanowi jedynie uzupełnienie opracowanej akjomatyzacji.

Literatura

[1] T. Bartoszyński, H. Judah, *Set theory: on the structure of the real line*, AK Peters, Wellesley, MA, 1995.

[2] K. Ciesielski, J. Pawlikowski, *The Covering Property Axiom* CPA. *A combinatorial core of the iterated perfect set model.* Cambridge University Press 164. Cambridge University Press, Oxford, 2004.

[2] poza skończoną ilością

[3] A. Dow, *The regular open algebra of* $\beta\mathbb{R}\backslash\mathbb{R}$ *is not equal to the completion of* $\mathcal{P}(\omega)/\operatorname{fin}$, Fund. Math. 157 (1998) 33-41.

[4] A. Dow, K. P. Hart, *Cut points in Čech-Stone remainders*, Proc. AMS 123 (1995), 909-917.

[5] S. Fuchino, H. Mildenberger, S. Shelah, P. Vojtáš, *On absolutely divergent series*, Fund. Math. 160 (1999), 255-268.

[6] A. Miller, *There are no Q-points in Laver's model for the Borel Conjecture*, Proc. AMS 78 (1980), pp. 498-502

[7] S. Shelah, O. Spinas *The distributivity numbers of* $\mathcal{P}(\omega)/\operatorname{fin}$ *and its square*, Trans. AMS, 325 (1999), 2023-2047.

[8] O. Spinas *Partition numbers*, Ann. Pure Appl. Logic 90 (1997), pp. 243-262.