Sebastian Sydor

Oszacowania jąder całkowych

Rozprawa doktorska

Promotor: prof. dr hab. inż. Krzysztof Bogdan

Streszczenie

Niniejsza rozprawa powstała w wyniku prób lepszego zrozumienia oszacowań zaburzeń Schrödingerowskich gęstości przejścia badanych w [1].

Zaburzenie Schrödingerowskie polega na dodaniu do danego operatora, na przykład laplasjanu Δ, operatora mnożenia przez pewną funkcję q. Ważną rolę w tych rozważaniach odgrywa założenie o lokalnej małości funkcji q, warunek typu Kato [5, 9]. Zaburzenia typu Schrödingerowskiego ogólnych gęstości przejścia były badane w [1] przy następujących założeniach na funkcję q,

$$\int_s^t \int_X p(s,x,u,z)|q(u,z)|p(u,z,t,y)dzdu \le [\eta + \gamma(t-s)]p(s,x,t,y).$$

p jest skończoną dodatnią i odpowiednio mierzalną gęstością przejścia, γ i η są ustalonymi nieujemnymi liczbami rzeczywistymi, natomiast czasy $s < t$ i stany x, y są dowolne. Zakładając powyższy warunek, otrzymano w [1] następujące oszacowanie, podczas gdy $\eta < 1$,

$$\tilde{p}(s,x,t,y) \le \frac{1}{1-\eta} \exp\left(\frac{\gamma}{1-\eta}(t-s)\right) p(s,x,t,y).$$

$\tilde{p}$ jest Schrödingerowskim szeregiem perturbacyjnym, zdefiniowanym za pomocą p i q. Należałoby zaznaczyć, że wyniki w [1] zostały uzyskane przy zastosowaniu metod kombinatorycznych. Kombinatoryka pojawia się przy całkowaniu po sympleksach. W prologu do rozprawy, w rozdziale 2, badamy powyższe całkowania, gdzie przedstawiamy podobieństwo otrzymanego oszacowania do nierówności Gronwalla (patrz [8]). W rozdziale 2 również wskazujemy, jaką rolę odgrywa założenie małości pierwszego nietrywialnego wyrazu szeregu perturbacyjnego. Można powiedzieć, że całkowanie po sympleksach i warunek małości są przewodnimi tematami rozprawy.

Czerpiąc inspirację z [1], dalsze argumenty kombinatoryczne oparte na liczbach Stirlinga wykorzystane w [6] doprowadziły do wzmocnienia wyników z [1] przez (1) pominięcie warunku Chapmana-Kołmogorowa dla p, (2) osłabienie założeń na q, i (3) wzmocnienie oszacowania. Jeśli $0 < \eta < 1$ i $Q \geq 0$ są nadaddytywne, wtedy warunek

$$\int_s^t \int_X p(s,x,u,z)q(u,z)p(u,z,t,y)dzdu \leq [\eta + Q(s,t)]p(s,x,t,y), \quad (1)$$

(w skrócie $pqp \leq [\eta + Q(s,t)]p$) prowadzi do głównego oszacowania pracy [6]:

$$\widetilde{p}(s,x,t,y) \leq \left(\frac{1}{1-\eta}\right)^{1+Q(s,t)/\eta} p(s,x,t,y)$$

(w skrócie $pqp \leq (1-\eta)^{-1-Q(s,t)/\eta}\, p$), zobacz rozdział 3. Bardziej bezpośrednie metody zostały zaproponowane w [7] dla zaburzeń *gradientowych* gęstości przejścia $\Delta^{\alpha/2}$. W [7, p. 321] sugerowano, że ta technika może być użyta do zaburzeń Schrödingerowskich aby otrzymać główny wynik [6]. W [2] rozwinęliśmy tę obserwację do znacznej ogólności: oszacowaliśmy zaburzenia typu Schrödingerowskiego dla półgrup markowskich, jąder potencjałów i ogólnie jąder typu *forward* na czasoprzestrzeni przez funkcję q. Uzyskaliśmy porównanie lokalne w czasie i globalne w przestrzeni jądra oryginalnego i zaburzonego, przy odpowiednich warunkach małości dla pierwszego nietrywialnego wyrazu szeregu perturbacyjnego. Rezultaty z [2] zostały zaprezentowane w rozdziale 3, w szczególności Twierdzenie 3.1.5, które może być uznane za jeden z głównych wyników rozprawy.

W rozdziale 4 zajmujemy się oszacowaniami zaburzeń Schrödingerowskich dla jąder całkowych. Początkowe jądro K i zaburzające jądro q są teraz typu *forward* na czasoprzestrzeni. Rezultaty są bezpośrednim rozszerzeniem lokalnych zaburzeń Schrödingerowskich z rozdziału 3. W szczególności uzyskane zaburzenie i oryginalne jądro okazuje się być porównywalne lokalnie w czasie i globalnie w przestrzeni, zakładając całkowy warunek małości pierwszego nietrywialnego wyrazu szeregu perturbacyjnego. Ponadto przedstawiamy wyniki dla zaburzeń lokalnych w czasie i nielokalnych w przestrzeni, które balansują między rozdziałem 3 a rozdziałem 4 i wymagają oddzielnego traktowania. Rozdział 4 mniej więcej przedstawia rezultaty z preprintu [4] i jego wcześniejszej wersji [3]. Podczas gdy gęstości przejścia i jądra potencjału procesów Markowa były naszą główną motywacją, podkreślamy, że generalnie w pracy nie zakładaliśmy warunku Chapmana-Kołmogorowa dla badanych jąder.

Rezultaty z rozdziału 3 i rozdziału 4 są oparte na odpowiednich oszacowaniach wyrazów szeregu perturbacyjnego. Oszacowania odzwieciedlają wzajemne powiązania całek wielokrotnych na sympleksach w definicji poszczególnych wyrazów szeregu perturbacyjnego. W rozdziale 5 powtórnie badamy powyższe całki w przypadku ograniczenia przez funkcję wklęsłą. Nasze nowe podejście działa dla np. funkcji $Q(s,t) = (t-s)_+^\beta$ gdzie $0 < \beta < 1$.

Literatura

[1] Bogdan, K., Hansen, W., and Jakubowski, T. Time-dependent Schrödinger perturbations of transition densities. *Studia Math. 189*, 3 (2008), 235–254.

[2] Bogdan, K., Jakubowski, T., and Sydor, S. Estimates of perturbation series for kernels. *J. Evol. Equ. 12*, 4 (2012), 973–984.

[3] Bogdan, K., and Sydor, S. On nonlocal perturbations of integral kernels. *ArXiv e-prints* (May 2012). variant 1.

[4] Bogdan, K., and Sydor, S. On nonlocal perturbations of integral kernels. *ArXiv e-prints* (2013). variant 2.

[5] Chung, K. L., and Zhao, Z. X. *From Brownian motion to Schrödinger's equation*, vol. 312 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[6] Jakubowski, T. On combinatorics of Schrödinger perturbations. *Potential Anal. 31*, 1 (2009), 45–55.

[7] Jakubowski, T., and Szczypkowski, K. Time-dependent gradient perturbations of fractional Laplacian. *J. Evol. Equ. 10*, 2 (2010), 319–339.

[8] Sydor, S. Raport SSDNM: Gronwall inequality for semigroups. http://ssdnm.mimuw.edu.pl/pliki/prace-studentow/st/pliki/sebastian-sydor-2.pdf, 2011.

[9] Zhang, Q. S. A sharp comparison result concerning Schrödinger heat kernels. *Bull. London Math. Soc. 35*, 4 (2003), 461–472.