Prof. dr hab. **Aleksander Iwanow**
Ketedra Matematyki
Politechniki Śląskiej
ul. Kaszubska 35, 44 - 100 Gliwice

Gliwice, 26.06.2023

Recenzja
rozprawy doktorskiej mgra Adama Malinowskiego
GRUPY ELLISA W TEORII MODELI I ZBIORY SILNIE GENERYCZNE

W końcu pierwszej dekady lat 2000 Ludomir Newelski wprowadził grupy Ellisa do teorii (neo) stabilności. Rozważając sytuację, gdy grupa G jest definiowalna w strukturze M, Newelski skoncentrował się na dynamice topologicznej G-potoków $S_G(M)$ i $S_{ext,G}(M)$ przestrzeni typów nad M elementów z G (w przypadku "ext" formuły występują również z parametrami spoza M). W wyniku tych badań został wyeksponowany związek pomiędzy półgrupą Ellisa $E(S_{ext,G}(M))$ (i odpowiednią grupą Ellisa $\mathcal{E}(M)$) a podstawowymi pojęciami współczesnej teorii (neo) stabilności, np. definiowalną średniowalnością, czy składowymi G^0, G^{00}. Analizując *logikę i matematykę* tej teorii można zauważyć, że podejście Newelskiego jest dość uniwersalne i może być stosowane w sytuacji szerszej. Znalezienie odpowiedniego kontekstu dałoby pewną systematyzację, uproszczenie dowodów i metody skierowane na pytania wykraczające poza granice dotychczasowych rozważań. Myślę, że zamysł doktoratu Adama Malinowskiego w dużym stopniu bazował na tym.

Sytuacja rozważana w rozprawie doktorskiej jest zupełnie ogólna: abstrakcyjna grupa G, (boolowska) G-algebra $\mathcal{A} \leq \mathcal{P}(G)$ i G-potok $S(\mathcal{A})$ ultrafiltrów nad $\mathcal{A}$. (W niektórych częściach pracy dochodzą dodatkowe warunki, np. topologie na G, ale bardzo długo autor nie potrzebuje ich. [1]) W Rozdziale 3 (pierwszy główny rozdział z wynikami Malinowskiego) algebry $\mathcal{A} \leq \mathcal{P}(G)$ występują *implicite*, ustępując roli pierwszoplanowej G-potokowi 2^G. Rozdział ten jest poświęcony zbiorom silnie generyznym i jednostajnie silnie generycznym. Pojęcie generyczności pochodzi z teorii

[1] Bardzo długo jedyną potrzebną topologią na G jest topologia proskończona, tzn. określona przez abstrakcyjną strukturę grupy G.

modeli, ale jest zupełnie naturalnym w kontekście ogólnym. Podzbiór $B \subset G$ nazywa się silnie generycznym, jeśli G-algebra generowana przez B składa się ze zbiorów generycznych.

Centralnym pojęciem tej części doktoratu jest okresowość. Wprowadzona definicja powoduje, że podzbiór $A \subseteq G$ jest okresowy dokładnie wtedy, gdy G-algebra generowana przez A jest skończona. Wtedy łatwo widać, że A jest silnie generyczny. Malinowski wprowadza uogólnienie - okresowość lokalną i pokazuje równoważność tego pojęia z silną generycznością i z prawie okresowością χ_A jako elementu potoku 2^G.

Moim zdaniem najciekawszą częścią Rozdziału 3 jest technika zbiorów bazowanyh na drzewach (three-founded sets) zaprezentowana w podrozdziale 3.2. Takie zbiory są silnie generyczne, a przy pewnym dodatkowym warunku okresowość tych zbiorów ma dość naturalną charakteryzację (Lemat 3.20). Technika ta jest bardzo przydatna w konkretnych przykładach. Stosując ją Malinowski pokazuje, że okresowość nie wynika z silnej generyczności. Generalnie, w Rozdziale 3 jest zbadane sporo przykładów. Np. w podrozdziale 3.3 rozważane są produkty półproste, grupy wolne i $PSL(2,\mathbb{R})$. Na bazie tych przykładów pokazane jest, że okresowość nie wynika nawet z jednostajnej silnej generyzności. Dodatkowo, przykłady zaprezentowane w tej części doktoratu będą używane później.

W Rozdziale 4 grupa G jest rozpatrywana jako grupa topologiczna (na początku z topologią proskończoną). Podzbiór A ma *silną własność Baire'a*, jeśli ma postać $U \Delta M$, gdzie U jest otwarty, a M jest nigdzie gęsty. Przez $\mathcal{SBP}$ jest oznaczana G-algebra takich zbiorów. Pierwszy główny wynik tego rozdziału (Twierdzenie 4.6) pokazuje, jak obliczyć grupę Ellisa G-potoku $S(\mathcal{A})$ dla G-algebry $\mathcal{A} \leq \mathcal{SBP}$ (w topologii proskończonej). Wartość tego twierdzenia podkreślają obserwacje, że algebra $\mathcal{SBP}$ i jej pewne naturalne podalgebry są d-domknięte, a dodatkowo zbiory prawie bazowane na drzewach są w $\mathcal{SBP}$. Pozwala to na korzystanie z techniki Rozdziału 3.

Podrozdział 4.1 zawiera pierwsze zastosowania teorio-modelowe. Najpierw Malinowski pokazuje, jak z ogólnych rozważań jego pracy można wyprowadzić znany wynik, że grupa Ellisa $\mathcal{E}(M)$ w przypadku stabilnym jest izomorficzna z G/G^0. Później rozpatruje sytuację elementarnego rozszerzenia $M \prec M^*$ dla struktur z definiowalnymi grupami G i G^*. Znowu czysto abstrakcyjne rozumowania pozwolają ustalić iso/homomorphism $\mathcal{E}(M^*) \to \mathcal{E}(M)$ pomiędzy odpowiednimi grupami Ellisa. W tych rozważaniach struktury M i M^* są są *dobierane* do grupy G, ale jest to rozszerzenie scenariusza badanego przez Newelskiego w jednej z prac z roku 2012.

W Rozdziałach 4.2 i 4.3 zakłada się, że grupa G jest (pre) zwarta względem pewnej topologii. Rozpatrując ją zamiast topologii proskończonej, Malinowski próbuje przeprowadzić analizę równoległą do sposobu postępowania w podrozdziale 4.1. Otrzymane wyniki są przydatne w sytuacjach teorio-modelowych. Wynika to z faktu, że gdy grupa G jest definiowalna w pewnej strukturze M, grupa G również posiada dodatkową strukturę definiowalną, najczęściej w postaci pewnej topologii. Teorie o-minimalne tworzą idealną ilustrację tej uwagi, ponieważ grupy definiowalne w tych teoriach posiadają naturalną strukturę rozmaitości. Malinowski stosując metodę podrozdziałów 4.1 - 4.3 udowadnia, że jeśli M jest o-minimalna i gęsta, $M \prec N$ i interpretacja G w N jest zwarta, to grupy $\mathcal{E}(M)$ i $\mathcal{E}(N)$ są izomorficzne (podobny wynik przy bardzo bliskich założeniach byl wcześniej pokazany przez Newelskiego). Dowód Malinowskiego wzbogaca naszą wiedzę o przypadku o-minimalnym, np. przez pokazanie, że zbiory ext-definiowalne w M posidają silną własność Baire'a.

Pozostała część Rozdziału 4 robi wrażenie uzupełniającej. W podrozdziale 4.4 Malinowski bada przypadek grupy topologicznej G, która nie jest prezwarta. Jego analiza (przy standardowych założeniach jak wyżej) doprowadza do istnienia tzw. typów *w nieskończoności*. Np. wszystkie prawie okresowe elementy G-potoku $S(\mathcal{A})$ są takie.

W podrozdziale 4.5 jest badana odpowiedniość pomiędzy generycznymi podalgebrami algebry $\mathcal{SBP}$ i generycznymi podalgebrami algebry regularnych zbiorów otwartych. Pokazane jest, jak ta odpowiedność może być stosowana w przypadku o-minimalnym. Wyniki te uzupełniają wcześniejsze badania Jagielly, ale również dobrze ilustrują możliwe komplikacje w realizacji pewnych naturalnych sposobów postępowania.

Rozprawa ma dwa dodatki.

Appendix A: Obliczenie grupy Ellisa dla pewnego produktu półprostego.

Appendix B: Opis nieokresowych jednostajnie silnie generycznych podzbiorów grupy przez skończone aproksymacje.

Mam wrażenie, że są to pełnoprawne części doktoratu, a taka organizacja jest związana z dużą ilością wątków niekoniecznie zakończonych ładnymi sformułowaniami.

Podsumowując osiągnięcia doktoratu, uważam, że abstrakcyjne podejście Malinowskiego do teorio-modelowej dynamiki topologicznej doprowadziło do powstania pewnej teorii, która wyjaśnia w sposób atrakcyjny duży obszar wcześniejszych badań teorio-modelowych i trochę przewiduje wyniki dalszych badań. Stwierdzam, że podstawowe cele bardzo ciekawego projektu doktoranta i jego promotora zostały zrealizowane. Trochę brakuje mi nowych pryncypialnych wyników czysto teorio-modelowych [2], ale wiem, że projekt nie zakładał tego.

Aparat matematyczny wykorzystany w rozprawie jest bogaty i w wielu miejscach dość zaawansowany. Dowody są ładnie przedstawione. Widać, że autor ma wystarczającą kulturę matematyczną. Praca jest pełna różnorodnych, niebanalnych przykładów.

Duża ilość wątków i różnorodność mają też pewne negatywne konsekwencje. Wydaje mi się, że przygotowanie publikacji zawierających wyniki doktoratu nie będzie łatwe. Np. nie widzę dobrego sposobu podziału pracy na niezależne części mogące stanowić artykuły do czasopism. Każdy podział upłytsza wyniki pracy.

Rozprawa Malinowskiego ma pewne wady w prezentacji materiału. Rozdział 2 podaje potrzebną informację dotyczącą dynamiki topologicznej. Rozdział jest napisany w stylu poradnika/artykułu z wikipedii. Brakowało mi przy podaniu definicji wskazania dokładnego miejsca, skąd one zostały przepisane (np. *generic, strongly generic*). Dlaczego niektóre fakty są podane z dowodami? Czy to oznacza np., że jest to folklor nie publikowany wcześniej? [3] Czy Rozdział 2.4 ma być traktowany jako część, która ma być oceniana przez recenzentów jako osiągnięcie autora?

Mimo tego, że praca pretenduje do przypisania jej do teorii modeli, nie zawiera ona odpowiedniego wstępu. Mam wrażenie, że standardowe publikacje w czasopismach zawierają więcej definicji, czy systemu oznaczeń/ustaleń. Np. nie zauważyłem definiji *externally definable subset*. Na str. 40 w Przykładzie 4.13 autor nie chce definiować relacji zanurzenia elementarnego $\preceq^*$ w ext-wzbogaconym języku i odsyła do pracy [New12b]. Nie jest to trudna definicja, wymaga kilku dodatkowych wierszy.

Nie mam wrażenia, że praca jest napisana w sposób przyjazny do czytelnika. Np. scenariusz 2 na str. 41 nie jest. Kwestia autorstwa terminologii jest często

[2] zastosowania teorii Malinowskiego dotyczą głównie teorii o-minimalnych i mają charakter uzupełniający

[3] Prezentacja Rozdziału 2.3 właśnie tak została wyjaśniona

pomijana. Z punktu widzenia recenzenta jest ważne wiedzieć, jakie definicje były znane wcześniej, a które należą do doktoranta.

Dobrze wiem, że w tekstach takiego rodzaju potknięcia są nie do uniknięcia. Dlatego nie będę wgłębiać się w dalsze zarzuty.

Stwierdzam, że rozprawa doktorska mgra Adama Malinowskiego spełnia wszystkie wymogi stawiane rozprawom doktorskim w Art.187 (ust. 1 - 3) Ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. *Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce* i wnoszę o dopuszczenie go do dalszych etapów postępowania doktorskiego.

Aleksander Iwanow