Prof. dr hab. Elżbieta Pol
Instytut Matematyki
Uniwersytet Warszawski
ul. Banacha 2
02-097 Warszawa

Warszawa, dn. 19.08.2017

Recenzja rozprawy doktorskiej Macieja Pietronia "Odwzorowania gęstych podzbiorów płaszczyzny i kostki Hilberta".

Rozprawa doktorska magistra Macieja Pietronia poświęcona jest własności przeliczalnej gęstej jednorodności. Przypomnijmy, że przestrzeń X ma własność przeliczalnej gęstej jednorodności, jeśli dla dowolnych dwóch przeliczalnych gęstych podzbiorów A, B przestrzeni X istnieje homeomorfizm h przestrzeni X na X taki, że $h(A) = B$. To klasyczne pojęcie, wywodzące się od Cantora, Brouwera, Frechéta, ma obszerną literaturę; w szczególności rozpatrywano wiele wzmocnień i uogólnień przeliczalnej gęstej jednorodności. Ta interesująca i naturalna problematyka stale przyciąga uwagę świetnych matematyków, takich jak J.van Mill, T.Banakh, D.Repovš, M.Hrušak (odnotujmy, że A.V.Arhangel'skij i J. van Mill poswięcili własności przeliczalnej gęstej jednorodności Rozdział 14 artykułu "Topological homogeneity" w Recent Progress in General Topology III, Springer, 2014).

Przedstawione w rozprawie doktorskiej M.Pietronia wyniki wnoszą do tej problematyki nowe i ciekawe wyniki.

Pierwsza część pracy doktorskiej M.Pietronia (Rozdział 2) poświęcona jest wzmocnieniu wyniku M.K.Forta z 1962 r., mówiącego, że kostka Hilberta I^N ma własność przeliczalnej gęstej jednorodności. M.Pietroń dowodzi mianowicie (Twierdzenie 2.4.7), że dla dowolnych dwóch przeliczalnych gęstych podzbiorów A, B kostki Hilberta, istnieje homeomorfizm f kostki Hilberta taki, że $f(A) = B$, oraz f zachowuje produktową miarę Lebesgue'a. Ta część rozprawy doktorskiej oparta jest na pracy M.Pietronia "Measure-preserving countable dense homogeneity of the Hilbert cube", Top. Appl. 160 (2013), 257-263.

Przypomnijmy, że w 1987r. Michał Morayne udowodnił, że dla danych dwóch przeliczalnych gęstych podzbiorów A, B przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, istnieje analityczny dyfeomorfizm $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, zachowujący n-wymiarową miarę Lebesgue'a taki, że $h(A) = B$ (sama własność przeliczalnej gęstej jednorodności przestrzeni euklidesowej R^n dla dowolnego n została udowodniona przez Brouwera w 1913r. oraz, niezależnie, przez Frechéta w 1910r.).

M.Pietroń opiera dowód Twierdzenia 2.4.7 na indukcyjnym kryterium zbieżności z pracy M.K.Forta w Pacific J. Math. 12 (1962) (które następnie zostało niezależnie odkryte przez R.D.Andersona w pracy w Mich. Math. J. 14 (1967)). Przedstawiona przez M.Pietronia konstrukcja ciągu zachowujących produktową miarę Lebesgue'a homeomorfizmów kostki Hilberta, zbiegających do zachowującego tę miarę homeomorfizmu przekształcającego dany zbiór przeliczalny gęsty A na dany zbiór przeliczalny gęsty B, opiera się na szeregu pomysłowych, choć technicznych lematów o istnieniu homeomorfizmów I^N zachowujących produktową miarę Lebesgue'a i spełniających pewne specjalne warunki. Istotną rolę odgrywają też Lematy 2.3.1, 2.3.2 i 2.3.4 o istnieniu specjalnych zachowujących 2-wymiarową miarę Lebesgue'a homeomorfizmów płaszczyzny, bądź kwadratu w $\mathbb{R}^2$. Lemat 2.3.1 mówi, że dla dowolnych punktów $x, y \in \mathbb{R}^2$ istnieje zachowujący miarę homeomorfizm płaszczyzny na siebie przekształcający punkt x na y i będący identycznością poza kulą o środku w punkcie $\frac{1}{2}(x+y)$ i promieniu $d(x,y)$. Z kolei Lemat 2.3.4 wykorzystuje m.in. twierdzenie J.Oxtoby'ego i S.Ulama z 1941 r. Dowód głównego wyniku tej części pracy - Twierdzenia 2.4.7 - jest technicznie dość skomplikowany i wymaga znacznej inwencji.

Druga część pracy (Rozdział 3) poświęcona jest dowodowi pewnej mocniejszej wersji własności przeliczalnej gęstej jednorodności dla płaszczyzny euklidesowej i opiera się na (złożonej do druku) pracy wspólnej M.Pietronia i M.Morayne'a "A stronger form of countable dense homogeneity of the plane".

Głównym wynikiem Rozdziału 3 jest Twierdzenie 3.3.1, gdzie rozważa się dwie przeliczalne rodziny $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \ldots\}$ i $\mathcal{K} = \{K_1, K_2, \ldots\}$ podzbiorów płaszczyzny euklidesowej, których średnice dążą do zera, spełniające następujące warunki:

(i) domknięcia zbiorów C_i i K_i są continuami takimi, że dla $i \neq j$, $i, j \in N$, $cl(C_i) \cap cl(C_j) = \emptyset = cl(K_i) \cap cl(K_j)$,

(ii) zbiory $\bigcup \mathcal{C}$ i $\bigcup \mathcal{K}$ są gęste w $\mathbb{R}^2$,

(iii) dla każdych dwóch zbiorów $X, Y \in \mathcal{C} \cup \mathcal{K}$ istnieje zachowujący orientację homeomorfizm h przestrzeni $\mathbb{R}^2$ na siebie taki, że $h(X) = Y$.

Twierdzenie 3.3.1 orzeka, że istnieje homeomorfizm f przestrzeni $\mathbb{R}^2$ na $\mathbb{R}^2$ taki, że $\{f(C) : C \in \mathcal{C}\} = \mathcal{K}$.

Dowód, wykorzystujący pewne idee G.T.Whyburna z pracy "Topological characterization of the Sierpiński curve" z Fund. Math. 45 (1958) (który pokazał, że dla każdych dwóch krzywych Sierpińskiego X i Y w $\mathbb{R}^2$ istnieje homeomorfizm płaszczyzny na siebie, przekształcający X na Y), rozbity jest na szereg lematów, w bardzo pomysłowy sposób wykorzystujących topologię płaszczyzny.

Odnotujmy, że w części tego dowodu na str. 21-23 jest pewna nieścisłość (na szczęście nietrudna do naprawienia). Mianowicie autor pisze, że można założyć, że $\mathcal{C}$ i $\mathcal{K}$ są rodzinami podzbiorów pewnych kul otwartych G i H w $\mathbb{R}^2$, odpowiednio, a następnie konstruuje przekształcenie $\tilde{f}$ z gęstego podzbioru clG w clH i korzystając z Lematu 3.3.12 przedłuża jednoznacznie $\tilde{f}$ do homeomorfizmu całej płaszczyzny, mimo, że założenie gęstości dziedziny $\tilde{f}$ w $\mathbb{R}^2$ z Lematu 3.3.12 nie jest spełnione.

Także, kłopotliwym utrudnieniem dla czytelnika jest podawanie w odsyłaczach jedynie numeru pracy z bibliografii, bez cytowania konkretnych twierdzeń (patrz np. odsyłacz do monografii K.Kuratowskiego ze strony 15). Praca zawiera też kilka ewidentnych literówek (między innymi na stronach 15_{13}, 15_{6-7}, 16_{12} i 18^{10}).

Usterki te nie są jednak istotne i moja ocena rozprawy jest bardzo pozytywna.

Konkluzja. Podsumowując, uważam, że rozprawa doktorska Macieja Pietronia zawiera nowe, interesujące wyniki, mające pomysłowe i złożone technicznie dowody, dotyczące ciekawej problematyki, przyciągającej uwagę wielu topologów.

Nie mam wątpliwości, że ta bardzo dobra rozprawa doktorska spełnia ustawowo i zwyczajowo stawiane rozprawom doktorskim wymagania i wnioskuję o dopuszczenie magistra Macieja Pietronia do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Elżbieta Pol

Elżbieta Pol