Rapport sur les travaux de thèse de doctorat en mathématiques de Madame Zeineb Ghardallou

Titre de la thèse : *Positive solutions to some nonlinear elliptic problems*

Madame Zeineb Ghardallou s'intéresse dans ses travaux aux solutions positives (au sens des distributions) d'équations non linéaires de type

$$Lu = \varepsilon\varphi(\cdot, u) \tag{1}$$

dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 3$, où $\varepsilon \in \{1, -1\}$, $\varphi : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction qui satisfait certaines conditions variant suivant le cas $\varepsilon = 1$ ou $\varepsilon = -1$ et

$$L = \sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j}(x)\partial_i\partial_j + \sum_{i=1}^{d} b_j(x)\partial_i + c(x)$$

désigne un opérateur différentiel elliptique de second ordre. Les fonctions $c \leq 0$, $a_{i,j}$ et b_j sont supposées être suffisament régulières sur Ω de telle sorte que les solutions de l'équation $Lu = 0$ forment un "bon" faisceau harmonique. En d'autres termes, L est considéré pour jouer le rôle de l'opérateur de Laplace Δ dans la théorie du potentiel classique.

Le manuscript présenté par Mme Ghardallou est consitué de sept chapitres précédés par une introduction détaillée où les résultats sont bien énoncés. Les deux premiers chapitres sont consacrés à rappeler des notions de base de la théorie du potentiel : principe de minimum, problème de Dirichlet, fonction de Green, classe de Kato, ... Dans le troisième chapitre, l'auteur applique le théorème du point fixe de Schauder pour démontrer que le problème de Dirichlet non linéaire

$$\begin{cases} Lu &= \varepsilon\varphi(\cdot, u) & \text{dans } D \\ u &= f & \text{sur } \partial D \end{cases} \tag{2}$$

admet une unique solution (notée $U_D^{\varphi}f$). De plus, cette solutions vérifie l'équation intégrale

$$u(x) + \varepsilon \int_D G_D(x, y)\varphi(x, u(y))\, dy = h(x), \qquad x \in D \tag{3}$$

où $h = H_D f$ est l'unique solution du problème de Dirichlet linéaire

$$\begin{cases} Lu &= 0 & \text{dans } D \\ u &= f & \text{sur } \partial D. \end{cases} \tag{4}$$

Ici D est un domaine régulier vérifiant $\overline{D} \subset \Omega$ et G_D désigne la fonction de Green de l'opérateur L sur D. Je dois signaler que des résultats de ce type sont bien connus dans la littérature. En effet, le problème de Dirichlet non linéaire a été étudié dans un cadre plus large contenant les espaces harmoniques [1] et les espaces de balayage [2].

Dans la deuxième partie du chapitre 3, Mme Ghardallou établit des propriétés utiles de l'application $(D, f) \mapsto U_D^\varphi f$ qui généralisent des résultats analogues obtenus dans [3] dans le cas particulier

$$L = \Delta \qquad \text{et} \qquad \varphi(x,t) = \xi(x)t^\gamma \quad \text{pour } 0 < \gamma \leq 1. \tag{5}$$

Dans le but de classifier les solutions positives de l'équation (1) dans un domaine de Green $D = \Omega \subset \mathbb{R}^d$, deux résultats importants sont démontrés dans le chapitre 4 :

▷ pour $\varepsilon = 1$, la formule (3) réalise une bijection entre les fonctions L-harmoniques positives bornées et les solutions postives bornées de (1).

▷ pour $\varepsilon = -1$ et $c \equiv 0$, la formule (3) réalise une bijection entre les fonctions L-harmoniques positives et les solutions postives de (1).

Ainsi, dans le cas $\varepsilon = 1$, l'auteur établit des conditions nécessaires et suffisantes sous lesquelles la fonction nulle est l'unique solution de (1) sur Ω. Plus précisément, (1) admet une solution positive bornée non identiquement nulle sur Ω si et seulement si il existe un borélien $A \subset \Omega$ non effilé à l'infini, un réel $c_0 > 0$ et $x_0 \in \Omega$ tels que

$$\int_{\Omega \setminus A} G_\Omega(x_0, y)\varphi(y, c_0)\, dy < \infty. \tag{6}$$

Ceci étend un théoréme obtenu dans le cas particulier (5) (voir [3]) aux opérateurs de type L et pour une classe plus large de fonctions φ.

Le chapitre 5 est consacré à l'étude des inégalités de type Harnack pour les solutions positives de l'équation non linéaire (1). Dans le chapitre 6, l'auteur rappelle les notions de base concernant la théorie du potentiel associée à l'oppérateur de Laplace-Beltrami sur l'espace de Damek-Ricci (N A). Ensuite, elle présente dans le dernier chapitre une étude détaillée de l'existence des solutions bornées et des solutions larges de (1). Plus précisément, soit $\varphi(x,t) = p(x)\psi(t)$ et définissons, pour $r > 0$,

$$p_*(r) = \inf_{|x|=r} p(x), \quad p^*(r) = \sup_{|x|=r} p(x), \quad p_{osc}(r) = p^*(r) - p_*(r).$$

En considérant d'abord le cas où p est radiale (i.e., $p_{osc} \equiv 0$) et ψ est concave, l'auteur a démontré que l'équation

$$Lu = p(x)\psi(u) \tag{7}$$

admet une solution positive bornée non identiquement nulle sur $\mathbb{R}^d$ si et seulement si

$$\int_0^\infty r p_*(r)\, dr < \infty. \tag{8}$$

Par contre, (1) admet une solution large sur $\mathbb{R}^d$ si et seulement si

$$\int_0^\infty r p_*(r)\, dr = \infty. \tag{9}$$

Lorsque p n'est pas radiale, l'existence des solutions larges devient plus difficile à examiner. Néanmoins, en supposant que $p_{osc}(r)$ (l'oscillation de p) est suffisament petite pour r assez grand, les assertions ci-dessus restent valables.

En conclusion, les résultats obtenus par Madame Ghardallou sont de bonne qualité scientifique et représentent une contribution considérable à la théorie du potentiel. Elle a déjà publié une grande partie de sa thèse dans le journal "Potential Analysi". Pour toutes ces raisons, je suis très favorable à la soutenance de sa thèse de doctorat.

Fait à Hammam Sousse, le 5 avril 2016.

K. El Mabrouk

[1] A. Baalal, W. Hansen. Nonlinear perturbation of balayage spaces. Ann. Acad. Sci. Fenn., Math. 27, No. 1, 163-172 (2002).

[2] K. El Mabrouk. Semilinear perturbations of harmonic spaces, Liouville property and a boundary value problem. Potential Anal. 19, No. 1, 35-50 (2003).

[3] K. El Mabrouk. Entire bounded solutions for a class of sublinear elliptic equations. Nonlinear Anal., 58, No. 1-2, 205-218 (2004).