Dr hab. Łukasz Delong, prof. SGH
Instytut Ekonometrii, Kolegium Analiz Ekonomicznych
SGH Szkoła Główna Handlowa w Warszawie

Warszawa, 22.08.2020

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Michała Krawca pt. *"Drift change detection in models based on Lévy processes with applications to mortality analysis"*

Opis rezultatów pracy:

Autor w swojej rozprawie doktorskiej rozważa problem optymalnego stopowania, który polega na zidentyfikowaniu momentu zmiany rozkładu procesu Lévy'ego (zmiany dryfu i rozkładu skoków). Praca inspirowana jest klasycznym problemem detekcji zmiany dryfu, który został rozwiązany przez Shiryaeva w latach 60. Problem ten, w różnych wersjach, nadal jest rozważany w literaturze procesów stochastycznych i ich zastosowań, o czym świadczą pozycje wskazane w literaturze.

Praca składa się z czterech rozdziałów i załącznika. Rozdział 1 zawiera krótkie wprowadzenie do tematu pracy. W Rozdziale 2 Autor omówił klasyczny problem detekcji zmiany dryfu w modelu gdzie dynamika procesu opisana jest ruchem Browna z dryfem oraz przedstawił rozwiązanie klasycznego problemu optymalnego stopowania. Rozdział 2 zawiera wyniki prac Shiryaeva, które można zastosować w modelach bardziej ogólnych niż model Shiryaeva z ruchem Browna, i które są stosowane przez Autora w Rozdziałach 3-4. Dodatkowo, w Rozdziale 2.2 Autor wprowadził dyskretną wersję statystyki, która ma posłużyć do zidentyfikowania momentu zmiany dryfu w modelu gdzie rozkład oczekiwania na zmienę dryfu jest wykładniczy (uogólniona wersja statystyki Shiryaeva-Robertsa). W Rozdziale 2.3 zastosował statystykę do wskazania momentu zmiany dryfu dla procesu śmiertelności dla danych z Polski.

Jak opisano w Rozdziale 2, aby rozwiązać problem stopowania związany ze zmianą dryfu, należy rozwiązać pewne równanie różniczkowe. W tymże równaniu pojawia się generator procesu prawdopodobieństwa a posteriori zmiany dryfu $\pi_t = Pr(\theta \leq t|\mathcal{F}_t)$. Proces π związany jest z procesem L, który służy do zdefiniowania równoważnej miary prawdopodobieństwa pozwalającej zmienić dynamikę procesu bez dryftu na dynamię procesu z dryfem. Główne rezultaty Autora w rozprawie związane są ze znalezieniem procesów L i π w modelach z procesem Lévy'ego.

Nowe wyniki matematyczne znajdują się w Rozdziałach 3-4. W Rozdziale 3 Autor rozważał model gdzie dynamika procesu opisana została procesem Lévy'ego i rozwiązał problem detekcji zmiany dryfu i zmiany rozkładu skoków (zmiany rozkładu wysokości skoków i intensywności skoków). W szczególności, znalazł procesy L i π, jak również pokazał, że funkcja wartości spełnia odpowiednie równanie różniczkowe. W Rozdziale 3.4 Autor rozważył szczególny przypadek procesu Lévy'ego i podał jawne rozwiązanie równania różniczkowego i problemu optymalnego stopowania. W Rozdziale 3.5 zastosował wyniki do wskazania momentu zmiany dryftu i rozkładu skoków dla procesu śmiertelności dla danych z Polski. Wyniki z Rozdziału 3 zostały opublikowane w czasopiśmie Applied Mathematics and Computations.

W Rozdziale 4 Autor analizował wielowymiarową wersję modelu z Rozdziału 3. Tak jak w poprzednim rozdziale, znalazł procesy L i π, rozważył dwa szczególne przypadki dwuwymiarowego procesu Lévy'ego i podał jawne rozwiązania równania różniczkowego i problemów optymalnego stopowania. W Rozdziale 4.5 Autor zastosował swoje wyniki do wskazania momentu zmiany dryfu dla łącznego procesu śmiertelności dla kobiet i mężczyzn dla danych z Polski.

Moim zdaniem rozprawa zawiera nowe, ciekawe i wartościowe wyniki. Nowe matematyczne wyniki to wyznaczenie dynamiki procesu prawdopodobieństwa π w rozważanych modelach z procesem Lévy'ego oraz znalezienie jawnych rozwiązań w pewnych szczególnych problemach optymalnego stopowania (dla szczególnych procesów Lévy'ego). Dodatkowo, Autor zastosował swoje rozwiązania z teorii optymalnego stopowania do analizy szeregu czasowego współczynników zgonu, co także jest nowością. Rozdział 3 powstał w oparciu o jeden współautorski artykuł opublikowany w Applied Mathematics and Computations (udział autora 60%). Czasopismo to znajduje się na liście czasopism MNiSW z liczbą punktów 100. Tym samym spełnione zostało minimalne kryterium dorobku wskazane w Ustawie. Wyniki numeryczne związane ze współczynnikami śmiertelności pochodzą z pracy opublikowanej w Przeglądzie Stystycznym. Można przypuszczać, że wyniki z Rozdzialu 4 zostaną opublikowane w przyszłości.

Praca składa sięz 76 stron. Bibliografia liczy 40 pozycji. Praca jest dobrze napisana, jednak ja osobiście preferuje znacznie bardziej szczegółowy opis dowodów.

Uwagi:

- W modelu z szumem Lévy'ego, w momencie θ następuje nie tylko zmiana dryfu procesu Lévy'ego ale również zmiana rozkładu skoku (zmiana rozkładu wysokości skoków i intensywności skoków). Moim zdaniem należało mówić w rozprawie o "drift and jump change detection",

- W Rozdziale 1 znajduje się przegląd literatury związanej z detekcją zmiany dryfu, ale brakuje przeglądu literatury związanej z identyfikacją zmian w procesie śmiertelności. W szczególności, brakuje odwołań i porównania z pracami El Karoui, Loisel, Mazza, *Fast change detection on proportional two-population hazard rates* i El Karoui, Loisel, Salhi, *Minimax optimality in robust detection of a disorder time in Poisson rate*,

- Autor używa pojęcia "trójka charakterystyczna" dla procesu Lévy'ego, ale nie podał co rozumie przez "trójkę". W szczególności, parameter dryfu w trójce charakterystycznej procesu Lévy'ego jest definiowany przez Autora (zgodnie z książką Kyprianou) z innym znakiem niż jest to rozważane w innych pozycjach w literaturze (np. Cont, Tankov),

- Brakuje komentarzy nt. jednoznaczności istnienia rozwiązań dla wyprowadzonych równań różniczowych dla procesów π,

- W przykładach zastosowań teorii optymalnego stopowania do analizy śmiertelności, należało dokładniej opisać, że parametry modelu $\log \mu_t = a_0 + a_1 t + \sigma W_t +$

$\sum_{s\leq t} \triangle X(s)$ są szacowane przy założeniu, że w okresie, w którym estymujemy model, nie zaszła żadna zmiana w dynamice obserwowanego procesu, oraz, że σ i a_0 nie zmianiają się po czasie θ, jak również omówić zasadność takich założeń w omawianym problemie,

- Strona 40, w celu skonstruowania dwustronnego przedziału na poziomie $1-\alpha$ należy wybrać kwantyl rzędu $1-\alpha/2$, a nie $1-\alpha$,

- W przykładach zastosowań teorii optymalnego stopowania do analizy śmiertleności, wykonano test potwierdzający rozkład normalny zmiany współczynników śmiertelności, ale zabrakło już testu potwierdzającego rozkład wykładniczy skoków,

- We wstępie do Rozdziału 4 Autor twierdzi, że "we consider the most general model", ale można sobie wyobrazić znacznie bardziej ogólne modele,

- Strona 8: W drugiej linijce - $\pi_0 = x$, a nie $\pi_0 = 0$; Strona 55: W ostatnim wzorze powinno być: $d\pi_t^r = \frac{1-\pi_t^r}{1-G(t)} dG(t)$,

- W Rozdziale 4 Autor zapisał dynamikę dla procesu π_t^r. Następnie, należało zapisać dynamikę dla procesu $\pi_t = \int \pi_t^r dH(r)$, czego brakuje. Definiując $\pi_t = \int \pi_t^r dH(r)$, rozważamy całkę stochastyczną względem parametru i dokonujemu zamiany kolejności całowania. Warto było to skomentować w rozprawie (Rozdział IV.6, Protter, Stochastic Integration and Differential Equations),

- Nie jest jasne czy rozwiązanie w Rozdziale 4.3.2 można znaleźć w sposób jawny rozwiązując analogiczne równanie jak w Rozdziale 3.4.

Pytania i wątpliwości:

- W pracy rozwiązany został problem optymalnego stopowania w modelu w czasie ciągłym. Czy dopuszczalne jest zastosowanie optymalnego rozwiązania w modelu w czasie ciągłym jako rozwiązania problemu optymalnego stopowania w modelu w czasie dyskretnym? Czy rozwiązanie w czasie dyskretnym, gdzie rozważamy ciąg zmiennych losowych, nie będzie miało innej statystyki i innego poziomu kiedy należy zastopować proces? W zastosowaniach teoretycznych wyników w czasie ciągłym do procesu współczynników zgonu rozważane są dane roczne. Czy roczny krok dyskretyzacji nie jest zbyt duży, aby podjąć optymalną decyzję o zmianie dryfu w szeregu czasowym współczynników śmiertleności w oparciu o wyniki w modelu w czasie ciągłym?

- W przykładach zastosowań teorii optymalnego stopowania do analizy śmiertelności, identyfikujemy zmianę dryfu i skoków w procesie $\log \mu_t = a_0 + a_1 t + \sigma W_t + \sum_{s\leq t} \triangle X(s)$. Co jeżeli zmieni się σ lub a_0? Czy wyznaczony moment stopowania, jako test statystyczny identyfikujący zmiany w dynamice procesu, jest wrażliwy na te zmiany? Czy możemy na podstawie badań nt. śmiertelności powiedzieć, że przede wszystkim zmianie ulega współczynnik związany z czasem i rozkład skoków (w tym samym momencie), natomiast stała i zmienność procesu są stałe w czasie?

- Czy można zastąpić rozważane w rozprawie procesy *jump-diffusion* ogólnymi procesami Lévy'ego? Wydaje się, że byłoby to możliwe bez znacznej komplikacji dowodów. W Rozdziale 4 procesy Lévy'ego skaczą w tym samym momencie. Wydaje się, że można było rozważyć ogólny wielowymiarowy proces skokowy bez znacznej komplikacji dowodów?

- Zaproponowana w Rozdziałach 3-4 technika zamiany miary powoduje, że zmiana dryfu związana jest ze zmianą rozkładu skoków, tzn. nie możemy mieć dowolnej zmiany dryfu po tym jak ustalimy zmianę rozkładu skoków (i vice versa). Czy nie lepiej byłoby zdefiniować równoważną miarę jako produkt miary dla skoków z parametrem β_1 i miary dla ruchu Browna z parametrem β_2, tak aby analizować dowolne zmiany dryfu i skoków? Wydaje się, że takie podejście nie byłoby istotnie trudniejsze w analizie?

- W rozprawie badany jest czas zajścia zmiany dryfu i zmiany skoku (następujące równocześnie) Czy można byłoby rozważyć problem stopowania gdzie badamy czas zajścia zmiany dryfu lub zmiany skoku (który nadejdzie wcześniej)?

- Z równań (3.6) i (3.10) można wywnioskować, że możemy swobodnie zmienić rozkład skoków (wybrać dowolne β_0 i zmienić rozkład wysokości skoków wraz z intensywnością skoków) i wtedy istnieje dokładnie jedna możliwa zmiana dryfu r dla procesu Lévy'ego. Co jeżeli będziemy chcieli zmienić dryf zadając pewne r - czy wtedy zawsze znajdziemy β_0? Czy jest jakaś relacja pomiędzy β_0 i r i czy są jakieś ograniczenia na potencjalne zmiany dryfu i skoków?

- Generator $\mathcal{A}$ został zdefiniowany dla funkcji klasy C^2. Czy funkcja wartości w rozważanych problemach jest zawsze klasy C^2? Czy podane w pracy jawne rozwiązania są klasy C^2? Czy zawsze istnieje tylko jedno rozwiązanie równania różniczkowego dla funkcji wartości?

- Dowód Twierdzenia 3.1 wydaje się być poprawny dla ogólnego procesu (ruchu Browna czy procesu Lévy'ego). Jaka jest nowość przedstawionych w rozprawie dowodów w porównaniu z wynikami Shiryaeva i innych autorów cytowanych w rozprawie?

- Czym różni się wykładnicza zamiana miary z Rozdziału 4 od miary Esschera z Rozdziału 3? Wydaje się, że Autor w Rozdziale 4 nadal stosuje transformatę Esschera? Jeżeli nie, to dlaczego nie zastosowano transformaty Esschera, aby zachować spójność z Rozdziałem 3? Czy Twierdzenie 4.1 nie wynika bezpośrednio ze zmiany miary zgodnie z transformatą Esschera?

- Nie jest dla mnie jasne jak z pierwszego równania na s. 56 otrzymano generator (4.24). Brakuje mi dowodu prowadzącego do generatora (4.24), aby ocenić poprawność rozumowania. Najważniejsze dwa pytania:

  1. Czy proces π_t jest rzeczywiście procesem Markowa? (jasne jest, że π_t^r jest procesem Markowa, ale jeżeli π_t^1 i π_t^2 są procesami Markowa to $\pi_t = 0.5\pi_t^1 + 0.5\pi_t^2$ nie musi być procesem Markowa)

2. Ograniczmy się do zdegenerowanej dystrybuanty H, czyli rozważamy tylko jedno r. W jaki sposób element $\frac{1-\pi_t^r}{1-G(t)}dG(t)$ w dynamice procesu π_t^r zamienił się w $G'(0)$ w równaniu generatora? Czy nie powinniśmy zdefiniować

$$\mathcal{A}_t f(x) = \lim_{h\to 0} \mathbf{E}\Big[\frac{f(\pi_{t+h}^r) - f(\pi_t^r)}{h} | \pi_t^r = x\Big],$$

i dostać $-(1-x)(\log(1-G(t)))'$? W równaniu dla π_t^r mamy $\frac{dG(t)}{1-G(t)}$ co implikuje, że dryf procesu π_t^r zależy od czasu, i w konsekwencji, generator dla procesu π_t^r także zależy od czasu. Dystrybuanta G jest dowolną dystrybuantą i nie zachodzi własność braku pamięci. Czy to nie oznacza, że problem optymalizacyjny i reguła stopowania zależą od czasu?

Konkluzja:

Pan Michał Krawiec wykorzystuje w swojej rozprawie doktorskiej techniki sterowania stochastycznego, procesy Lévy'ego i równania różniczkowe. Cel pracy związany z rozwiązaniem problemu detekcji zmiany dryfu dla procesów Lévy'ego został osiągnięty. Przedstawione powyżej uwagi, pytania i wątpliwości nie mają wływu na mają bardzo dobrą ocenę rozprawy jako całości. Pracę przeczytałem z ciekawością i bardzo dużym zainteresowaniem. Bardzo doceniam wyniki z rachunku prawdopodobieństwa i teorii sterowania. Jednak jestem sceptyczny jeżeli chodzi o zastosowania wyników do modelowania zmian śmiertelności ponieważ przedstawione przykłady budzą pewne wątpliwości ze statystycznego punktu widzenia, przede wszystkim cechuje je zbyt duża arbitralność wyboru kluczowych parametrów.

Uważam, że przedstawiona do oceny praca mgr. Michała Krawca spełnia wymogi Ustawy z dn. 20 lipca 2018 Prawo o Szkolnictwie Wyższym i Nauce (Dz. U. 2018 poz. 1668). Wnoszę o jej przyjęcie jako rozprawy doktorskiej i dopuszczenie do publicznej obrony.

Łukasz Delong