Dr hab. inż. Marcin Magdziarz
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
ul. Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław

Wrocław, 20 kwietnia 2017 r.

Recenzja

rozprawy doktorskiej mgr Agaty Ilnickiej

pt. **„Stochastyczne metody punktu siodłowego w modelowaniu rezerw"**

Uwagi ogólne. Rozprawa doktorska mgr Agaty Ilnickiej napisana jest w języku polskim, liczy 61 stron, składa się z czterech rozdziałów oraz bibliografii liczącej 34 pozycje. W bibliografii znajdują się dwie prace wspólne z promotorem [33,34], opublikowane w cenionych czasopismach matematycznych Journal of Applied Probability oraz Applicationes Mathematicae.

Przedmiot rozprawy. Motywacją do przedstawionych w rozprawie badań jest potrzeba wyceny przyszłych zobowiązań towarzystwa ubezpieczeniowego oraz szacowanie rezerw na pokrycie tych zobowiązań. W świetle dyrektywy Solvency II, takie oszacowania musza być wyznaczone przez każdego ubezpieczyciela, jest to więc zagadnienie bardzo aktualne oraz ważne.

W literaturze znaleźć można wiele różnych modeli matematycznych służących do modelowania przyszłych zobowiązań. Chyba najczęściej stosowaną w praktyce jest metoda chain ladder oparta na trójkątach szkodowych [19,20]. We wstępie rozprawy podane są również szczegółowe referencje do innych metod modelowania rezerw, zwłaszcza tych stochastycznych [21-25]. Zestawienie to pokazuje, że rozważane w doktoracie zagadnienia są bardzo aktualne, co więcej, zajmują się nimi czołowi probabiliści pracujący w wiodących zagranicznych ośrodkach naukowych, m.in. T. Mikosch oraz G. Samorodnitsky.

W języku matematycznym, wyznaczanie asymptotyki rezerw sprowadza się do badania własności rozkładu warunkowej zmiennej losowej

$$N_k = \left(N \middle| \sum_{j=1}^{N} X_j = k \right), \tag{1}$$

gdzie N jest zmienną losową przyjmującą wartości w $\mathbb{N}_0$ (zazwyczaj ma ona rozkład Poissona), natomiast $X_1, X_2, \ldots$ jest ciągiem niezależnych, nieujemnych oraz całkowito-liczbowych zmiennych losowych. Zakłada się dodatkowo niezależność ciągu $\{X_n\}$ od zmiennej losowej N.

Główne wyniki rozprawy dotyczą asymptotyki dla wyrażeń $\mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{N} X_j = k\right)$, $\mathbb{E}\left(N \middle| \sum_{j=1}^{N} X_j = k\right)$ oraz $\mathbb{V}ar\left(N \middle| \sum_{j=1}^{N} X_j = k\right)$ gdy $k \to \infty$, z wykorzystaniem metody punktu siodłowego. Wyniki te z kolei pozwalają wyznaczyć wzory aproksymujące wielkości rezerw towarzystwa ubezpieczeniowego.

Na uwagę zasługuje również fakt, że przedstawione w rozprawie wyniki teoretyczne znajdują zastosowanie w klasycznych zagadnieniach kombinatorycznych. Mianowicie, dla przypadku rozkładów poissonowskich asymptotyczne zachowanie wyrażenia $\mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{N} X_j = k\right)$ pozwala podać wzór aproksymujący n-tą liczbę Bella, która definiowana jest jako liczba wszystkich partycji zbioru n-elementowego.

Opis wyników rozprawy. Pierwszy rozdział pracy rozpoczyna się wprowadzeniem do zagadnienia wyznaczania rezerw w ubezpieczeniach. Podana jest szczegółowo literatura dotycząca tego tematu oraz najpopularniejsze modele matematyczne. W drugiej części rozdziału przedstawione są najważniejsze wyniki z pracy [34], w której autorka wspólnie z promotorem wyznaczyła pewne własności asymptotyczne rozkładu zmiennej losowej (1) dla przypadku, gdy N oraz X_i mają rozkład Poissona z odpowiednimi średnimi. W tym celu wykorzystane zostały metody analityczne inspirowane pracą [18]. Głównym wynikiem tej części rozprawy jest Twiedzenie 1.1, w którym udowodniono, że

$$\mathbb{E}\,(N_k) \sim \Lambda^c(k+1),$$

$$\mathbb{V}ar\,(N_k) \sim \frac{\Lambda^c(k+1)^2}{\Lambda^c(k+1)+k}.$$

Tutaj funkcja $\Lambda^c(k)$ jest rozwiązaniem równania

$$\Lambda^c(k)\log\left(\frac{\Lambda^c(k)}{k}\right) = k,$$

natomiast $c > 0$ jest pewną stałą.

W rozdziale drugim autorka wykorzystuje metodę punktu siodłowego do wyznaczenia asymptotyki wyrażeń $\mathbb{P}(A = k)$ oraz $\mathbb{E}\left(\eta(N)\middle|A = k\right)$, gdzie $A = \sum_{i=1}^{N} X_i$, η to pewna funkcja deterministyczna, N ma rozkład Poissona oraz $\{X_i\}$ jest ciągiem iid niezależnym od N. Zakłada się również, że funkcja $\kappa(s) = \log(\mathbb{E}\exp(sA))$ jest funkcją stromą. Wykorzystywana tutaj wersja metody punktu siodłowego zaproponowana została po raz pierwszy w pracy [8] do aproksymacji ogonów złożonego procesu Poissona.

Najciekawszym i kluczowym pomysłem wykorzystanym w tej części rozprawy było wprowadzenie nowej rodziny miar $\mathbb{P}^s$, w szczególności miary $\mathbb{P}^\theta$, gdzie $\theta = \theta(k)$ jest punktem siodłowym, będącym rozwiązaniem równania

$$\mathbb{E}^\theta A = \kappa^{(1)}(\theta) = k.$$

Pytanie, jakie nasuwa się w tym momencie, to czy można coś więcej powiedzieć o miarach $\mathbb{P}^s$? Czy można np. podać ich gęstość względem miary $\mathbb{P}$?

Okazało się, że dla nowej miary $\mathbb{P}^\theta$ w wielu przypadkach w elegancki sposób można wyznaczyć asymptotykę $\mathbb{P}^\theta(A = k)$, co z kolei daje wyniki asymptotyczne dla wyjściowej miary $\mathbb{P}$. I tak w Twierdzeniu 2.3, przy dodatkowym założeniu, że X_i mają ograniczony nośnik, udowodniono, że

$$\mathbb{P}^\theta(A = k) \sim \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}}$$

i konsekwencji

$$\mathbb{P}(A = k) \sim \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} e^{a(\hat{B}(\theta)-1)-k\theta}.$$

Tutaj $\delta = \frac{1}{\sqrt{\kappa^{(2)}(\theta)}}$, $\hat{B}$ to funkcja tworząca momenty X_i, natomiast a to średnia zmiennej losowej N. Skomplikowany technicznie dowód tego twierdzenia wykorzystuje wzór odwrotny dla funkcji charakterystycznej.

W Twierdzeniu 2.4 oraz Wniosku 2.4 zakłada się, że dla ciągu zmiennych losowych Y_k (o tym samym rozkładzie co zmienna losowa A względem miary $\mathbb{P}^\theta$) zachodzi centralne twierdzenie graniczne $(Y_k - a_k)/b_k \xrightarrow{d} N(0,1)$ oraz że funkcja prawdopodobieństwa $q_k(l) = \mathbb{P}(Y_k = l)$ jest logarytmicznie wklęsła. W takim przypadku udowodnione zostały następujące asymptotyki

$$b_k \mathbb{P}^\theta(A = k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

i stąd

$$\mathbb{P}(A = k) \sim \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} e^{\kappa(\theta)-1)-k\theta}.$$

Powyższe wyniki pozwoliły w niektórych przypadkach wyznaczyć asymptotykę $\mathbb{E}\left(N \middle| A = k\right)$ (Twierdzenie 2.5).

Bazując na wcześniejszych rezultatach, autorka sformułowała dwie hipotezy dotyczące asymptotyki $\mathbb{P}(A = k)$. I tak w Hipotezie 2.1 zaproponowano, że

$$\mathbb{P}(A = k) \sim \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} e^{a(\hat{B}(\theta)-1)-k\theta} \left(1 + 3\gamma_4/24 - 5\gamma_3^2/24 + \gamma_5 O(1)\right),$$

gdzie $\gamma_l = a^{1-l/2} \frac{\hat{B}^{(l)}(\theta)}{(\hat{B}^{(2)}(\theta))^{l/2}}$. Hipoteza 2.3 wskazuje na asymptotykę

$$\mathbb{P}(A = k) \sim \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} e^{a(\hat{B}(\theta)-1)-k\theta} \left(1 - \frac{1}{12}(a\hat{B}(\theta))^{-1} + (a\hat{B}(\theta))^{-3/2} O(1)\right).$$

Prawdziwość powyższych hipotez w pełnej ogólności to w dalszym ciągu otwarty problem.

Rozdział drugi kończą przykłady konkretnych rozkładów oraz odpowiadające im jawne wzory na asymptotykę badanych wielkości oraz nawiązanie do klasycznych zagadnień kombinatorycznych dotyczących liczb Bella.

Rozdział trzeci ma charakter aplikacyjny. Zaproponowany w nim został nowy model stochastyczny wyceny rezerw. W Twierdzeniu 3.1 oraz Wniosku 3.1 podany został wzór na predyktor wartości tych rezerw. Wniosek 3.2 to wzór na drugi moment badanego rozkładu. Należy podkreślić trudne technicznie rachunki przeprowadzone w dowodach tych wyników. W oparciu o dowód na istnienie punktu siodłowego (Lemat 3.1) podana została również hipoteza dotycząca asymptotyki predyktora.

W ostatnim rozdziale autorka przedstawia metody numeryczne, które z powodzeniem można zastosować do wyznaczenia często niejawnych wyrażeń z poprzednich części pracy. Metody te opierają się głównie na szybkiej transformacie Fouriera i dają zadowalające wyniki. Należy podkreślić znaczenie tego rozdziału z punktu widzenia praktycznych zastosowań wprowadzonego modelu wyceny rezerw.

Znaczenie tematyki i ocena wyników. Z punktu widzenia teorii prawdopodobieństwa najistotniejsze wyniki uzyskane zostały w rozdziale drugim. Dotyczą one asymptotycznych własności złożonych rozkładów Poissona i wnoszą nowy istotny wkład do tej teorii. Należy podkreślić, że z analiz numerycznych wynika, iż uzyskane przez autorkę asymptotyczne wyrażenia na wartość oczekiwaną $\mathbb{E}N_k$ zbiegają znacznie szybciej w porównaniu z wynikami uzyskanymi przez innych autorów. W sposób naturalny pojawia się tutaj pytanie o szybkość zbieżności tych asymptotyk.

Na uznanie zasługuje również aplikacyjna część pracy. Autorka zaproponowała nowy model wyceny rezerw. Dla modelu tego wyprowadzone zostały wzory na predyktor dla tych rezerw. Podane zostały efektywne metody numeryczne, które można wykorzystać do wyznaczenia konkretnych wartości dla badanego modelu. Oznacza to, że wprowadzony model z powodzeniem może być wykorzystywany w praktyce.

Tematyka jest aktualna (interesuje się nią wielu czołowych probabilistów w Polsce i za granicą) oraz rozwojowa. Do weryfikacji pozostają m.in. kluczowe hipotezy zaproponowane w rozprawie.

Opanowanie metod matematycznych wykorzystanych w rozprawie wymagało od autorki sporego wysiłku. W przeprowadzonych dowodach autorka musiała wykazać się dużą sprawnością rachunkową oraz bardzo dobrą znajomością teorii prawdopodobieństwa. Również pomysły na przeprowadzenie niektórych dowodów budzą moje uznanie, przede wszystkim kluczowy pomysł na zastosowanie odpowiedniej nowej miary prawdopodobieństwa wykorzystującej punkt siodłowy.

Rozprawa jest zredagowana starannie i czytelnie. W pracy znalazłem sporą liczbę literówek, ale nie miały one wpływu na poprawność przeprowadzonych rozumowań. W niektórych przypadkach śledzenie dowodów wymagało dużej koncentracji, czasem wielokrotnego czytania, co wynikało przede wszystkim z ich technicznego charakteru. Jednakże kluczowe przejścia dowodowe były dokładnie wyjaśnione.

Konkluzja. Podsumowując stwierdzam, że rozprawa mgr Agaty Ilnickiej spełnia wszystkie warunki ustawowe i zwyczajowe stawiane rozprawom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie jej do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Marcin Magdziarz