

dr hab. inż. Zbigniew Michna prof. UE
Katedra Matematyki i Cybernetyki
Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

Recenzja rozprawy doktorskiej
mgr Agaty Ilnickiej
pt. „Stochastyczne metody punktu siodłowego w modelowaniu rezerw”

Rozprawa składa się z czterech rozdziałów i literatury. We wstępie zarysowany jest ogólnie rozważany problem a następnie badany jest rozkład zmiennej losowej o rozkładzie Poissona pod warunkiem złożenia poissonowskiego zmiennych losowych też o rozkładzie Poissona. Dokładniej, autorka znajduje asymptotykę wartości oczekiwanej i wariancji, gdy wartość warunku dąży do nieskończoności. Asymptotyki zawierają funkcję powiązaną z funkcją Lambert'a. Następnie wynik ten jest uogólniony dla ilorazu dwóch szeregów zależnych od parametru.

Rozdział drugi przedstawia najważniejsze wyniki pracy. Doktorantka rozpatruje sumę losową

$$A = \sum_{j=1}^N U_j,$$

gdzie zmienne losowe U_j są wzajemnie niezależne i głównie o jednakowym rozkładzie o wartościach nieujemnych całkowitych a zmienna losowa N w większości wyników o rozkładzie Poissona. Głównym celem pracy jest badanie asymptotyki wartości oczekiwanej $\eta(N)$ pod warunkiem, że $A = k$ dla pewnej nieujemnej funkcji η i $k \rightarrow \infty$. Autorka zauważa, że ta warunkowa wartość oczekiwana nie zmienia się po pewnej zamianie rozkładów zmiennych U_j i N . Dla tej tak naprawdę rodziny miar zostaje wybrana miara indeksowana $\theta(k)$, dla której wartość średnia A wynosi k . Jest to miara określona za pomocą tzw. punktu siodłowego $\theta(k)$ wyznaczonego z pewnego równania. Dla zmiennych losowych A w mierze indeksowanej przez $\theta(k)$ odpowiednio scentrowanych i znormalizowanych pokazana zostaje zbieżność do rozkładu normalnego, gdy $k \rightarrow \infty$ ale jak zauważa autorka nie można stąd znaleźć asymptotyki rozkładu. Natomiast znalezienie asymptotyki rozkładu zmiennej losowej A w mierze indeksowanej $\theta(k)$ pozwala znaleźć asymptotykę rozkładu zmiennej A , gdy jej wartości dążą do nieskończoności. Pierwszy taki wynik zostaje pokazany, przy założeniu, że zmienne U_j są ograniczone, ich funkcja charakterystyczna jest o okresie 2π i przy pewnym warunku zależnym od rozkładu N i U_j . Następnie zostaje rozpatrzony przypadek, gdy funkcja prawdopodobieństwa zmiennej losowej A jest logarytmicznie wklęsła. Wtedy ze zbieżności do rozkładu normalnego można wywnioskować asymptotykę prawdopodobieństw. Autorka cytuje tu Tw. 2.4, w którym warunek (2.19) jest niejasny. W Tw. 2.5 przy założeniu na asymptotykę rozkładu A i przy pewnym warunku na rozkład A otrzymana jest asymptotyka warunkowej wartości oczekiwanej zmiennej N pod warunkiem $A = k$, gdy $k \rightarrow \infty$. W Hip. 2.1 pojawia się asymptotyka rozkładu zmiennej losowej

A otrzymana z odwrócenia funkcji charakterystycznej szkoda tylko, że nie jest dokładnie wyjaśnione skąd ta asymptotyka wynika. Podobnie w Hip. 2.3 przy pewnych założeniach wysuwana jest hipoteza na asymptotykę rozkładu zmiennej losowej A . W dalszej części rozdziału przedstawione są przykłady. Stosując otrzymane twierdzenie doktorantka uzyskuje wzór Stirling'a i jego rozszerzoną wersję. Dla przypadku $[Poi(a), Poi(b)]$ (rozkład N , rozkład U) zostaje znaleziona asymptotyka warunkowej wartości oczekiwanej korzystając z asymptotyki funkcji Lambert'a. Podobne wyniki pojawiają się dla przypadku $[Poi(a), Geo(p)]$ i $[Poi(a), mixPoi(f)]$ (mieszany rozkład Poissona z rozkładem mieszającym o nośniku $[0, 1]$). W Lemacie 2.8 nie powinno być minusa przed x w liczniku i mianowniku i tak wydaje się jest to używane w dalszych rozważaniach. Bardzo ciekawe jest powiązanie otrzymanych wyników z liczbami Bella. Korzystając z Hip. 2.1 autorka dostaje asymptotykę liczb Bella.

W rozdziale trzecim przedstawiony jest model wypłat ubezpieczyciela w celu szacowania przyszłych rezerw pod warunkiem wypłat do chwili bieżącej. Punktem wyjścia jest niejednorodny proces Poissona, którego momenty zgłoszeń szkód są początkiem nowych niezależnych złożonych procesów Poissona opisujących ciąg wypłat związanych z daną szkodą. Dla tego modelu w Tw. 3.1 obliczana jest funkcja generująca momenty przyszłych wypłat pod ich warunkiem w chwili bieżącej. We wnioskach otrzymano ich wartość średnią i drugi moment. We Wn. 3.2 rów. (3.12) nie powinno być 2 w drugim składniku. W dalszej części rozdziału wysunięta jest hipoteza Hip. 3.1 na asymptotykę wartości średniej funkcjonału od liczby szkód i momentów ich pojawienia się pod warunkiem łącznej ich wartości. Doktorantka korzysta tu z metody punktu siodłowego. Wykorzystując tę hipotezę zostaje pokazana zbieżność przyszłych wypłat (scentrowanych i znormalizowanych) pod warunkiem ich wartości bieżącej do standardowego rozkładu normalnego. Stąd znalezione zostają aproksymacyjne wartości kwantyli warunkowych przyszłych wypłat.

W ostatnim rozdziale pracy doktorantka omawia metodę szybkiej transformaty Fouriera i stosuje ją do numerycznego wyznaczenia warunkowej wartości średniej dla modelu z poprzedniego rozdziału. Otrzymane wartości porównuje z uzyskanymi asymptotykami metodą punktu siodłowego. Porównanie to potwierdza poprawność uzyskanych teoretycznie asymptotyk.

Literatura rozprawy zawiera 34 pozycje i są to głównie publikacje z najlepszych czasopism probabilistyki stosowanej i ubezpieczeń. Ponadto cytowane artykuły są głównie nowymi pozycjami opublikowanymi kilka do kilkunastu lat temu co potwierdza, że temat pracy jest aktualny i cieszący się zainteresowaniem wśród probabilistów. Doktorantka cytuje dwie własne publikacje z czasopism *Journal of Applied Probability* i *Applicationes Mathematicae*, których jest współautorką.

Podsumowując doktorantka prezentuje oryginalne wyniki, które są interesujące z matematycznego punktu widzenia jak również mające zastosowanie w modelowaniu ubezpieczeniowym. Autorka wykazała się dużą wiedzą z probabilistyki i modelowania ubezpieczeniowego. Ponadto doktorantka sprawnie i pomysłowo szacuje i wyznacza asymptotyki skomplikowanych funkcji. Tak więc rozprawa spełnia wymagania stawiane dysertacjom doktorskim i wnoszą o dopuszczenie mgr Agaty Ilnickiej do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Zbigniew Michna

