prof. dr hab. Paweł M. Idziak
Katedra Algorytmiki
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Jagielloński
ul. Prof. Stanisława Łojasiewicza 6
30–348 Kraków

tel.: (+48–12) 664 66 48
sekr.: (+48–12) 664 66 47
fax: (+48–12) 664 66 72
e–mail: idziak@tcs.uj.edu.pl
http://tcs.uj.edu.pl

Kraków, 2 stycznia 2018

Recenzja rozprawy doktorskiej Daniela Hoffmanna

pt. *Theory of models with group actions, with special discourse on theories of fields*

Recenzowana praca doktorska zawiera oryginalne wyniki Daniela Hoffmanna. Sporo z tych wyników opartych jest na opublikowanych już, bądź przygotowanych do publikacji pracach:

(1) Daniel Max Hoffmann,
Model theoretic dynamics in a Galois fashion, manuscript.

(2) Daniel Max Hoffmann and Piotr Kowalski,
Existentially closed fields with finite group actions,
Journal of Mathematical Logic, to appear,

(3) Daniel Max Hoffmann and Piotr Kowalski,
Existentially closed fields with G-derivations,
Journal of the London Mathematical Society, **93**(2016), 590–618.

Główna część rozprawy (Rozdział 2) oparta jest o wyniki samodzielnej pracy (1). Ponadto, z dołączonego przez Piotra Kowalskiego oświadczenia wynika, że jego wkład nie wykraczał poza standardową współpracę (szacowaną przy wspólnych pracach na 50-50) i opiekę zwykle udzielaną doktorantom przez swoich opiekunów naukowych.

Wyniki rozprawy dotyczą problemów leżących na pograniczu geometrii algebraicznej i teorii modeli. W istocie badania te motywowane są pracami (Macintyre'a oraz) Chatzidakis i Hrushovski'ego na temat ciał z wyróżnionym automorfizmem. Najbardziej naturalnym przykładem jest automorfizm ciała $\mathbb{C}(x)$ funkcji wymiernych przesuwający argument tej funkcji o 1. Prowadzi to w oczywisty sposób do działania całej grupy $\mathbb{Z}$ na ciele $\mathbb{C}(x)$. Z punktu widzenia teorii modeli jest to bowiem wzbogacenie języka o jeden symbol funkcyjny. Dlatego badano (głównie) działanie grup skończenie generowanych, a nawet skończenie prezentowalnych. Badania takie miały różnorodne motywacje, w tym takie pochodzące z geometrii algebraicznej. Najładniejszym chyba zastosowaniem takich rozważań jest teoriomodelowy dowód hipotezy Manin'a–Mumford'a pochodzący od Hrushovski'ego, a używający głębokich własności działania skończenie generowanych grup wolnych w kontekście rozmaitości abelowych.

Z drugiej strony, rozważania takie wpisują się w pewnej mierze w ducha teorii Galois, a w istocie ładnie uogólniają i teoriomodelowo interpretują tego ducha.

W recenzowanej rozprawie rozważa się ogólną sytuację działania grup na ciała oraz na inne modele (o "ładnych" z teoriomodelowego punktu widzenia teoriach/własnościach, jak stabilność, możliwość eliminacji kwantyfikatorów czy elementów urojonych), odpowiednio w rozdziałach 3 i 2.

I tak, w rozdziale 2 wychodząc od modeli teorii T wbogaca sie je o działanie całej grupy automorfizmów G dostając tym samym teorię T_G w odpowiednio rozszerzonym języku. Następnie bardzo precyzyjna analiza związków modeli dla T, T_G oraz ich modelowych towarzyszy $T^{\mathrm{mc}}, T_G^{\mathrm{mc}}$ (cała praca jest wykonywana przy założeniu że istnieją) pozwala na przeniesienie pewnych własności teorii T^{mc} na T_G^{mc}. Przy założeniu eliminacji kwantyfikatorów i elementów urojonych (oraz przy dodatkowym założeniu o zachowaniu algebraicznych domknięć w monster-modelach dla T i T^{mc}) udało sie pokazać, że

- stabilność teorii T^{mc} przekłada się na nieco słabszą własność teorii T_G^{mc}, tzn prostotę,
- a superstabilność teorii T^{mc} przekłada się na superprostotę T_G^{mc}, o ile grupa G jest skończona.

Ponieważ prostota T_G^{mc} jest wykazywana poprzez potwierdzenie warunków Kim'a i Pillay'a konieczne było dokładniejsze studium zachowania (forkingowej) niezależności. Nie dziwi więc, że uzyskano sporo wyników idących zarówno w tym kierunku jak i w innych kierunkach algebraicznych.

Mimo, iż wiele wyników rozdziału 2 opartych jest na wcześniejszych rozważaniach (np. Chatzinakis, Pillay'a [11]), to przedstawione uogólnienia i ich dowody wymagały nierzadko pewnych istotnie nowych pomysłów. I tak w [11] startuje się od teorii modelowo zupełnej (na modelach której to działają automorfizmy z rozważanej grupy G), podczas gdy w rozprawie dopiero przechodzi się od teorii T do jej modelowego towarzysza T^{mc}. Przestaje więc być prawdą, że każdy model dla T_G^{mc} jest w istocie rozszerzeniem modelu dla T^{mc} o stosowne automorfizmy. Ominięcie założenia $T = T^{\mathrm{mc}}$ wymagało więc zrozumienia jak modele dla T_G^{mc} lokują się wśród modeli dla T^{mc}. Praca ta została wykonana poprzez rozważenie podstruktur modeli teorii T^{mc}, na których można wprowadzić działanie grupy G. Precyzyjna analiza tych podstruktur umożliwia opis modeli teorii T_G^{mc} właśnie jako podstruktur modeli dla T^{mc}. Właśnie ta analiza, wraz z wprowadzonymi pojęciami i aparatem do jej przeprowadzenia wydaje się być najcenniejszym osiągnięciem rozprawy.

Wydaje się, że status Rozdziału 3 (i w pewnej mierze Appendixu A) jest co najmniej dwojaki. Z jednej strony może być uznany za ilustrację na kanonicznym przykładzie uzyskanych w Rozdziale 2 wyników (przy założeniu skończoności grupy G). W rzeczywistości jednak, to wyniki dotyczące działania grupy automorfizmów na (algebraicznie domkniętych) ciałach otrzymane razem z Piotrem Kowalskim otworzyły drogę do tych zawartych w Rozdziale 2. Ciała stanowiły tu bowiem pewnego rodzaju poligon doświadczalny, pozwalający na stawianie hipotez w ogólnej sytuacji. Co więcej to ciała właśnie dostarczyły również stworzonych kontrprzykładów dla kuszących hipotez osłabiających (bądź eliminujących) niektóre założenia głównych wyników Rozdziału 2. To dla teorii ciał T (i grupy skończonej G) pokazano bowiem istnienie T_G^{mc} (co samo w sobie było już pewnym wyzwaniem) oraz prostotę tego modelowego towarzysza.

Rozprawę doktorską można traktować więc jako pierwsze[1] systematyczne studium teoriomodelowych własności działania grup automorfizmów na modelach teorii posiadających modelowego towarzysza (dla ciał rolę taką pełnią ciała algebraicznie domknięte). Tematyka ta ma głębokie źródła gdzieś w algebrze różnicowej oraz teorii Galois, a zatem jest dobrze zakorzeniona w klasycznych działach matematyki. Choć sporo wyników doktoratu ma swoje pierwowzory (szczególnie w teorii ciał), to jednak wykonana praca (zwłaszcza w Rozdziale 2) i uzyskane wyniki są dalece nietrywialne, a umiejętność wychwycenia właściwych pojęć[2] z teorii ciał i przenoszenia ich na grunt teorii modeli świadczy o dużej matematycznej dojrzałości autora.

Wyniki otrzymane przez Daniela Hoffmanna są ładne i stanowią głębokie studium teoriomodelowych fenomenów teorii Galois. Autor wykazał się dużą sprawnością techniczną, olbrzymią erudycją, znajomością literatury i metod badawczych. Pokazał, że potrafi wykorzystywać i adaptować poznawane metody w rozważanych przez siebie sytuacjach. Często wykorzystanie takie jest bardzo twórcze.

Wnoszę o dopuszczenie magistra Daniela Hoffmanna do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

[1] Nie licząc wcześniejszej pracy Sjögren'a zawierającej część wyników dla ciał, czasem nawet w mocniejszej wersji. Było to pierwsze studium działania grup (a nie pojedynczego automorfizmu, tzn. konkretnej grupy $\mathbb{Z}$ na ciałach).

[2] Jak np. reinwencja pojęcia regularnego rozszerzenia, czy relaksacja pseudoalgebraicznego domknięcia.