dr hab. Radosław Adamczak, prof. UW
Wydział Matematyki,
Informatyki i Mechaniki
Uniwersytetu Warszawskiego

Warszawa, 28 sierpnia 2019 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Witolda Świątkowskiego
pt. *O pewnych własnościach rozwiązań stochastycznego równania rekurencyjnego*,
napisanej pod kierunkiem prof. dr. hab. Ewy Damek i dr. Grzegorza Świderskiego na
Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego

1. Tematyka i struktura rozprawy

Recenzowana rozprawa doktorska dotyczy wielowymiarowych afinicznych stochastycznych równań rekurencyjnych postaci

$$X_{n+1} = A_{n+1}X_n + B_{n+1}, \tag{1}$$

gdzie A_n są macierzami losowymi wymiarów $d \times d$, zaś B_n wektorami losowymi o wartościach w $\mathbb{R}^d$ oraz elementy losowe (A_n, B_n), $n \in \mathbb{N}$, są niezależne i mają wspólny rozkład.

Badanie tego typu równań jest ważnym obszarem rachunku prawdopodobieństwa, znajdującym zastosowanie m. in. w analizie szeregów czasowych, matematyce finansowej i informatyce teoretycznej. Systematyczne badania dotyczące rozwiązań stacjonarnych zainicjowane zostały w latach siedemdziesiątych dwudziestego wieku słynną pracą Kestena, w której podane zostały warunki dostateczne na ich istnienie oraz zbadane zostało zachowanie w nieskończoności dystrybuant ich rozkładów brzegowych. W kolejnych latach równania typu (1) były badane przez wielu znanych matematyków, m. in. przez Goldiego, Guivarc'ha, Mikoscha, Samorodnitsky'ego. W ostatnim dziesięcioleciu tematyka ta jest intensywnie rozwijana na Uniwersytecie Wrocławskim przez grupę prof. Ewy Damek i prof. Dariusza Buraczewskiego.

Wyniki Kestena i większość późniejszych twierdzeń dot. granicznego zachowania rozkładów rozwiązań zakładają pewien rodzaj nieprzywiedlności rozkładów współczynników równania. W tym przypadku wszystkie jednowymiarowe rozkłady brzegowe rozwiązania stacjonarnego mają takie samo zachowanie w nieskończoności. Główna część recenzowanej rozprawy dotyczy sytuacji, w których założenie to nie jest spełnione, a zachowanie rozkładów brzegowych może istotnie zależeć od kierunku. Zjawisko to można zaobserwować już w przypadku macierzy diagonalnych, który jednak sprowadza się łatwo do analizy równań jednowymiarowych. W rozprawie badane są równania zadane przez ogólne macierze górnotrójkątne, w których występuje wiele zjawisk nieobecnych w klasycznej teorii.

Rozprawa składa się z sześciu rozdziałów. Rozdział 1 stanowi ogólne wprowadzenie w tematykę, rozdziały 2-4 dotyczą wspomnianego powyżej przypadku równań zadanych przez macierze górnotrójkątne. W rozdziale 5 przedstawione są wyniki dotyczące redukcji szerokiej klasy równań do równań, w których macierz współczynników jest blokowo górnotrójkątna, zaś w rozdziale 6 wyniki związane z absolutną ciągłością rozkładów rozwiązań równań jednowymiarowych.

2. Główne wyniki rozprawy

Poniżej przedstawiam pokrótce główne wyniki recenzowanej rozprawy. Z uwagi na ich techniczny charakter i mnogość założeń, nie podaję precyzyjnych sformułowań, a jedynie opisuję ich najważniejsze aspekty.

2.1. Zachowanie dystrybuanty rozkładów brzegowych rozwiązań stochastycznych równań rekurencyjnych zadanych przez macierze trójkątne

Zagadnienie równań zadanych przez macierze trójkątne przedstawione jest w rozdziałach 2–4. Rozdział 2 stanowi wprowadzenie w tematykę, zasadnicza część zawarta jest w dalszej części pracy. Rozdział 3 oparty jest o preprint Doktoranta i M. Matsui, rozdział 4 o samodzielny preprint Doktoranta.

Oznaczmy przez (A, B) element losowy o takim samym rozkładzie jak para (A_n, B_n). Głównym obiektem badań w omawianej części pracy jest stacjonarne rozwiązanie równania (1) w sytuacji, gdy macierz A jest górnotrojkątna oraz współczynniki zarówno macierzy A, jak i wektora B są nieujemne. Zgodnie ze znanymi wynikami dot. stochastycznych równań rekurencyjnych rozkład stacjonarny zadany jest przez rozkład wektora $W = (W_1, \ldots, W_d)$, niezależnego od pary (A, B), spełniającego równanie

$$W \stackrel{d}{=} AW + B, \tag{2}$$

gdzie $\stackrel{d}{=}$ oznacza równość rozkładów.

W rozdziale 3, przy odpowiednich (złożonych, ale naturalnych) założeniach dotyczących macierzy A i wektora B, Doktorant dowodzi istnienia dodatnich stałych $\tilde{\alpha}_i, C_i$, $i = 1, \ldots, d$, takich że

$$\lim_{x\to\infty} x^{\tilde{\alpha}_i}\mathbb{P}(W_i > x) = C_i. \tag{3}$$

Kluczowym założeniem w tej części pracy jest

$$\alpha_i \neq \alpha_j \text{ dla } i \neq j, \tag{4}$$

gdzie liczby α_i zadane równością $\mathbb{E}A_{ii}^{\alpha_i} = 1$.

Stałe $\tilde{\alpha}_i$ wyrażone są poprzez α_j jawnym wzorem, uwzględniającym zależności między poszczególnymi współrzędnymi rozwiązania, wymuszone przez strukturę macierzy A (rozmieszczenie niezerowych elementów). Doktorant wprowadza odpowiednią relację częściowego porządku $\trianglelefteq$ opisującą te zależności, co pozwala zapisać współczynnik $\tilde{\alpha}_i$ jako

$$\tilde{\alpha}_i = \min\{\alpha_j : i \trianglelefteq j\}. \tag{5}$$

Należy podkreślić, że choć sama idea wprowadzenia porządku $\trianglelefteq$ oraz powyższy wzór na współczynniki $\tilde{\alpha}_i$ nie są zaskakujące, podobnie jak oparcie dowodu istnienia stałych C_i o odpowiednią indukcję, szczegóły techniczne są bardzo złożone i opierają się na wysoce nietrywialnych argumentach, łączących probabilistykę, analizę i kombinatorykę. Kluczowym elementem dowodu jest odpowiednia reprezentacja rozwiązania stacjonarnego (oparta na jego jedyności), wyrażona w postaci sumy nieskończonej, która zostaje następnie rozbita na kilka składników, zależących od pomocniczych parametrów. Oszacowania poszczególnych składników są trudne technicznie, a globalna struktura dowodu dość skomplikowana.

Rozdział 4 rozprawy zawiera wynik blisko związany z (3), przy zastąpieniu założenia (4) słabszym warunkiem

$$\mathbb{P}(A_{ii} = A_{jj}) < 1 \text{ dla } i \neq j. \tag{6}$$

Kosztem nieznacznego wzmocnienia warunków dotyczących całkowalności współczynników macierzy A, Doktorant dowodzi istnienia stałych $\xi(i)$ oraz $L_i, M_i > 0$, takich że dla $t > t_i$,

$$L_i t^{-\tilde{\alpha}_i} \leqslant \mathbb{P}(W_i > t) \leqslant M_i t^{-\tilde{\alpha}_i} (\log t)^{\xi(i)}, \tag{7}$$

gdzie $\tilde{\alpha}_i$ są ponownie zadane wzorem (5).

Wynik ten nie ma tak definitywnej formy jak (3) z uwagi na różnicę w granicznym zachowaniu oszacowań górnych i dolnych. Doktorant wyjaśnia, że przy pewnych dodatkowych założeniach, słabszych niż warunek (4), dowód przedstawiony w rozdziale 3 pozwala wciąż uzyskać istnienie granicy (3). Stawia również hipotezę, że w ogólnej sytuacji właściwą asymptotyką jest $t^{-\tilde{\alpha}_i}(\log t)^{\xi(i)-1}$.

Dowód ponownie oparty jest na indukcji, z uwzględnieniem rozbicia wprowadzonego w rozdziale 3 i wykorzystaniem części udowodnionych tam lematów, dodatkowym elementem są jednak bardzo złożone argumenty kombinatoryczne, związane z szacowaniem wielokrotnych sum. Również struktura rozumowań indukcyjnych staje się dużo bardziej skomplikowana, bazując na zagnieżdżonych, piętrowych konstrukcjach. Moim zdaniem pokazują one dużą sprawność techniczną Doktoranta.

2.2. Redukcja ogólnych stochastycznych równań rekurencyjnych do równań z macierzą blokowo górnotrójkątną

Głównym wynikiem rozdziału 5 jest abstrakcyjne twierdzenie dotyczące reprezentacji rozwiązań ogólnych równań typu (1) poprzez rozwiązania równań, w których macierze A_n są blokowo gornotrójkątne z blokami spełniającymi tzw. zerowy warunek Kestena (definicja 5.1.2. w rozprawie). Motywacją dla głównego twierdzenia jest potencjalna możliwość rozszerzenia analizy rozdziałów 3 i 4 na macierze blokowo trójkątne. Długofalowy plan badań polegałby na odpowiedniej modyfikacji porządku $\trianglelefteq$ oraz wykorzystaniu specjalnych własności diagonalnych bloków wraz z odpowiednią indukcją. Strategia ta jest moim zdaniem obiecująca, a choć jej realizacja może być niezwykle trudna technicznie, sama idea bardzo dobrze świadczy o dojrzałości naukowej i horyzontach Doktoranta, pokazując że potrafi on osadzić uzyskane wyniki w szerszym kontekście dziedziny i zaproponować odpowiedni program badawczy.

Niestety, główne wynik rozdziału, podobnie jak dowód, zawierają pewne nieścisłości, zapewne wynikające z faktu, że w przeciwieństwie do rozdziałów 2, 3 i 6, ten oparty jest na niepublikowanym wcześniej materiale. W szczególności w głównym twierdzeniu 5.2.1. brakuje założenia dot. struktury niezerowych współczynników macierzy A, bez którego dość łatwo skonstruować kontrprzykład. Aby twierdzenie pozostało prawdziwe, a dowód poprawny, należy np. założyć, że prawdopodobieństwo, że wszystkie nietrywialne współczynniki macierzy są niezerowe, jest dodatnie. Przy takim założeniu dowód podany w rozprawie rzeczywiście prowadzi do tezy twierdzenia. Pragnę dodać, że sugestię wprowadzenia tego założenia otrzymałem od Doktoranta, z którym skontaktowałem się w sprawie wyjaśnienia wątpliwości związanych z dowodem. Korespondencja z Doktorantem i jego wyjaśnienia skłaniają mnie ku opinii, że brak jawnego sformułowania tego założenia jest wynikiem błędu edytorskiego.

W twierdzeniu występują także dodatkowe drobne nieścisłości, które zakwalifikowałbym raczej jako literówki niż błędy merytoryczne. Dotyczą one relacji między współczynnikami wektorów X i X' oraz macierzy A i A' (w jednym z równań permutacja ζ powinna zostać zastąpiona przez ζ^{-1}) oraz wzoru na macierz B', który jest istotnie inny niż otrzymany w dowodzie (niemniej ostateczny wzór również ma jawną formę i zgodnie z uwagą umieszczoną po sformułowaniu twierdzenia pozwala na wyznaczenie trójki (A', B, ζ) z pary (A, B)).

Należy podkreślić, że wskazane mankamenty są dość łatwe do poprawienia, a główne twierdzenie, po dodaniu brakującego założenia, nadal jest interesujące i wystarczająco ogólne, by uzasadnić przedstawiony powyżej plan badawczy.

2.3. Absolutna ciągłość rozwiązań

Rozdział 6, oparty na samodzielnej pracy Doktoranta, opublikowanej w Colloquium Mathematicum, zawiera szereg wyników dotyczących absolutnej ciągłości rozkładu rozwiązania równania (2) w przypadku jednowymiarowym. Przedstawionych jest kilka warunków na parę (A,B) gwarantujących absolutną ciągłość rozwiązania, m.in. warunek dotyczący istnienia gęstości (A, B) na odpowiedniej rodzinie krzywych bądź odpowiedniej całkowalności warunkowej transformaty Fouriera na zbiorze dodatniej miary. Zaprezentowane wyniki oparte są na ogólnym twierdzeniu, pochodzącym od Alsmeyera, Iksanova i Röslera, gwarantującym, że rozkład X jest bezatomowy i albo singularny albo absolutnie ciągły względem miary Lebesgue'a. Twierdzenie to pozwala sprowadzić dowód absolutnej ciągłości do znajdowania odpowiednich nietrywialnych minorant dla rozkładu. Dzięki tej własności dowody głównych wyników są dość zwięzłe i bezpośrednie, co nie oznacza że są trywialne. Uzyskane twierdzenia są interesujące, szkoda natomiast, że nie zostały one zilustrowane konkretnymi przykładami równań występujących w zastosowaniach. W mojej ocenie zwiększyłoby to atrakcyjność tego rozdziału. Rozumiem jednak, że brak ten mógł zostać pierwotnie spowodowany ograniczeniami na długość artykułu narzuconymi przez czasopismo.

Oprócz twierdzeń dotyczących absolutnej ciągłości w rozdziale 6 podany został warunek dostateczny na geometryczną ergodyczność łańcucha Markowa zadanego przez równanie (1), który może zostać uzyskany przy pomocy podobnych metod minoryzacyjnych. Uważam ten wynik za ciekawy i wartościowy. Umożliwia on użycie do analizy równania (1) wielu mocnych rezultatów uzyskanych w teorii łańcuchów Markowa, np. twierdzeń typu Berry'ego-Esseena, zasady wielkich odchyleń czy nierówności wykładniczych. Pewnym mankamentem tej części pracy jest jednak brak precyzyjnych definicji używanych pojęć, co jest dość istotne z uwagi na to, że niektóre z nich (np. geometryczna ergodyczność) funkcjonują w literaturze w kilku nieznacznie różniących się wersjach. Ponieważ główne konkluzje dowodów oparte są na odnośnikach do literatury, aby upewnić się co dokładnie zostało udowodnione, czytelnik zmuszony jest sięgnąć do innych publikacji.

3. Ocena rangi uzyskanych wyników

Przedstawione w rozprawie wyniki oceniam wysoko. Szczególnie istotne ze względu na potencjalne zastosowania, rozwój abstrakcyjnej teorii i trudności dowodowe są według mnie twierdzenia przedstawione w rozdziałach 3 i 4. Moim zdaniem złożoność przedstawionych rozumowań sprawia, że rozdziały te mogłyby stanowić samodzielną rozprawę doktorską.

Twierdzenia dotyczące redukcji ogólnych równań do równań zadanych przez macierze blokowo górnotrójkątne również uważam za interesujące. Choć ich przyszła doniosłość i potencjalne zastosowania zależą od powodzenia naszkicowanego w pracy dalszego planu badawczego, jak wspomniałem wyżej, samo zaproponowanie takiego planu dobrze świadczy o matematycznym poziomie Doktoranta.

Z kolei wyniki przedstawione w rozdziale 6, choć zdecydowanie prostsze technicznie od pozostałej części pracy, stanowią obiecujący krok w kierunku wypracowania ogólnej teorii absolutnej ciągłości rozwiązań równań stochastycznych, co wydaje się ważnym kierunkiem badań.

Poruszone w rozprawie zagadnienia dotyczą w większości nowych obszarów teorii równań stochastycznych, co nie pozwala na proste zastosowanie istniejących wyników. Przedstawione dowody, choć oczywiście bazują na twierdzeniach znanych z literatury, wymagały wprowadzenia nowych idei i pojęć, co ma znaczący wpływ na moją jednoznacznie pozytywną ocenę całości rozprawy.

4. Ocena sposobu prezentacji wyników i kompletności dowodów

Struktura pracy, w tym podział na rozdziały, jest czytelna i naturalna. Poszczególne części odpowiadają różnym preprintom lub niepublikowanym wynikom, fragmenty dotyczące zbliżonej tematyki poprzedzone są wspólnym wprowadzeniem.

Za wadę uważam przypisanie rozdziałom oddzielnych bibliografii. Na skutek tego rozwiązania te same pozycje bibliograficzne występują w różnych częściach pracy pod zmienionymi numerami. Dodatkowo, w rozdziale 4, gdy przywoływane są fakty z rozdziału 3, Doktorant powołuje się na numerację z odpowiadającego mu preprintu, co utrudnia lekturę. Z kolei np. niedawna książka Buraczewskiego, Damek i Mikoscha w pierwszej części pracy przywoływana jest z podaniem pełnych danych bibliograficznych, podczas gdy w ostatnim rozdziale figuruje jako praca w przygotowaniu. Ma to oczywiście związek ze statusem tej książki w czasie publikacji preprintu, niemniej wspólna bibliografia pozwoliłaby ujednolicić prezentację.

Rozprawa zawiera znaczną liczbę literówek, przykładowo „assymptotic" w tytule rozdziału 2, niepotrzebne „that" (str. 3, l. 11), „exponet" (str. 8, l. 24), „Lyapuonv" (str. 9, l. 12), „notion" zamiast „notation" (str. 16, l. przedostatnia), „dacay" (str. 17, l. 13), „and" zamiast „end" (str. 43, l. 3), niepotrzebne „and" (str. 45, l. 24), „estmated" (str. 52, l. 14), podwójne „neither" (str. 58, l. 7). O ile tego typu usterki nie utrudniają nadmiernie lektury, pojawiają się także literówki związane z matematycznymi aspektami pracy, najważniejsze wymieniam poniżej wraz z innymi uwagami merytorycznymi.

Jeśli chodzi o język pracy, nie będąc specjalistą w zakresie języka angielskiego, mogę jedynie stwierdzić, że w większości rozprawy nie odbiega on od standardów typowych dla publikacji matematycznych. Tym niemniej w kilku miejscach występują sformułowania, które wydają się zawierać błędy językowe, być zbyt dosłownym tłumaczeniem z języka polskiego lub mieć nieco zbyt kolokwialny wydźwięk. Ponieważ część rozdziałów bazuje na prepublikacjach, pozwolę sobie wymienić kilka tego typu fragmentów, być może pozwoli to Autorom poprawić stylistykę w ostatecznych wersjach artykułów:

- str. 4, l. 29 – Zdanie „This is what we do in the next two chapters" nie ma bezpośredniego odniesienia do poprzedzającego go tekstu.

- str. 5, l. 11 – Zdanie „So what we may expect in the general case" wydaje się niekompletne.

- str. 23, l. 3 – Zdanie „In these steps the behaviors of coefficients for all W_j are inevitable" jest niezrozumiałe, być może brakuje w nim zwrotu „analysis of".

Pewne zastrzeżenia mam również do struktury dowodów, zwłaszcza w rozdziałach 3 i 4. Doktorant dość często przywołuje warunek (T), stanowiący globalne założenie tych części pracy, nie wymieniając których z blisko dziesięciu punktów warunku używa. Czasami warunek (T) w ogóle nie jest wspomniany wprost. O ile w większości przypadków czytelnik może łatwo sprawdzić poprawność odpowiednich fragmentów, wymaga to dodatkowego nakładu pracy, który mógłby zostać zaoszczędzony. Również odnośniki do literatury bywają zbyt ogólnikowe, o ile czasami Doktorant podaje numer twierdzenia z cytowanej pracy, dość często ogranicza się jedynie do numeru pracy, nawet gdy cytuje obszerną monografię (ma to miejsce przykładowo na str. 9, w linii 12 , na str. 37, w linii 4 oraz na str. 76, w linii 26). Kolejnym problemem są dość częste odwołania do fragmentów dowodów lub faktów nie wyodrębnionych w formie stwierdzeń (bez podania miejsca, w którym zostały udowodnione).

Pewne fragmenty dowodów, zbliżone do już przeprowadzonych, zostały ominięte, co przenosi część trudności technicznych na czytelnika. Do pewnego stopnia znajduje to jednak uzasadnienie w zakresie podobieństwa i poziomie skomplikowania notacji. Zamieszczenie wszystkich szczegółów niewątpliwie znacznie wydłużyłoby rozprawę. Należy podkreślić, że złożona natura rozważanych problemu sprawia, że pewne skróty i uproszczenia są nieuniknione. Wybór sposobu prezentacji bywa też związany z konwencją obowiązującą w danym obszarze matematyki, powyższe zastrzeżenia co do struktury dowodów należy więc traktować jako subiektywne.

Oprócz wspomnianego już brakującego założenia w rozdziale 5, w pracy pojawia się kilka drobnych błędów merytorycznych oraz uproszczeń. Mają one jednak charakter lokalny i mogą być dość łatwo poprawione, nie wpływają więc na poprawność dowodów głównych wyników. Poniżej wymieniam te najważniejsze wraz z literówkami o charakterze matematycznym oraz kilkoma dodatkowymi uwagami dotyczącymi sposobu prezentacji:

- str. 8 – Dla pełności wprowadzenia warto przytoczyć (być może w poprzednim rozdziale) definicję rozkładu niearytmetycznego.

- str. 9, l. 13-29 – Dowód ujemności γ_A oparty o pracę [27] jest moim zdaniem przedstawiony nieco zbyt zdawkowo

- str. 9, l. 29, str. 10, l. 13 – Słowo „stationarity" użyte w tych miejscach jest dość mylące, dowodzone są tu jedyność i istnienie rozwiązania stacjonarnego, a nie stacjonarność konkretnego procesu.

- str. 15, dowód lematu 3.3.3. – Warto uzasadnić dlaczego $C_k > 0$.

- str. 17, l. 5 – Po prawej stronie równości (3.4.3) brakuje zależności od t.

- str. 17, dowód lematu 3.4.2. – W dowodzie występuje kolizja oznaczeń, tą samą literą W znaczone jest rozwiązanie stacjonarne (3.1.2) i prawa strona (3.4.4), podczas gdy a priori nie wiadomo, że są one równe (jest to dopiero cel dowodu). Ponadto brakuje komentarza na temat stacjonarności prawej strony (3.4.2), która jest istotna dla skorzystania z jednoznaczności.

- str. 19, lemat 3.4.4. – Formalnie wzór (3.4.13) nie został udowodniony, wykazano tylko, że $\mathbb{E}Q_B(s)^{\tilde{\alpha}_\ell} < \infty$, podczas gdy $\mathbb{E}W_\ell^{\tilde{\alpha}_\ell} = \infty$, co w ogólności nie implikuje jeszcze oszacowań typu (3.4.13) na dystrybuanty (bez dodatkowych założeń o ich regularności). Tym niemniej rzeczywiście uzyskane oszacowanie pokazuje, że $Q_B(s)$ nie wpływa na graniczne zachowanie W_ℓ.

- str. 21, l. 27, str. 22, l. 1 – Przypadki $\alpha_{j_0} \leqslant 1$ i $\alpha_{j_0} > 1$ zostały zamienione miejscami.

- str. 21, ostatnia linia – Składników w sumie jest $n - m + 1$, a nie $n - m$.

- str. 22, l. 2 – We wzorze brakuje iloczynu diagonalnych elementów macierzy A_n, dopiero w kolejnych oszacowaniach można je odcałkować. Liczba składników sumy to ponownie $n - m + 1$.

- str. 28, l. 9 – Oprócz lematu 3.7.1. używane są tu też wcześniejsze oszacowania, które nie zostały przywołane.

- str. 28, l. 11 – Nie jest jasne o którą sumę chodzi, niemniej po prawej stronie (3.4.32) jest łącznie $N + 1$ (a nie $N - 1$) niezerowych składników.

- str. 31, lemat 3.7.1. – Wydaje się, że założenie (3.7.2) nie jest w tym lemacie potrzebne, odpowiednie oszacowanie punktowe wraz z lematem Fatou powinny pozwolić je wyeliminować (nie wpływa to oczywiście na poprawność dowodu).

- str. 37, l. 1 – Wzór na Q_B podany w tym miejscu nie pokrywa się ani z wzorem z pracy [9], ani z definicją z poprzedniego rozdziału (str. 20, 21). Jest on poprawny, ale aby go udowodnić należy połączyć kilka definicji i własności wprowadzonych w różnych częściach rozprawy. Z punktu widzenia czytelności pracy zdecydowanie warto byłoby zamieścić dowód. Jest on krótki i bezpośredni, gdy wszystkie niezbędne odnośniki są zebrane w jednym miejscu. Według mnie najlepszym rozwiązaniem byłoby zamieszczenie krótkiej uwagi z dowodem w rozdziale 3 i pracy [9], gdzie wielkość Q_B jest wprowadzana po raz pierwszy.

- str. 37, l. 2 – Występuje tu pewna niezgodność indeksów między definicją Q_T a wzorem (3.4.5), nie wpływa ona jednak na dalszy ciąg dowodu.

- str. 37, l. 27, str. 38, l. 16 – Lewa strona wzoru (4.3.8) nie zależy od n, bez definicji tego parametru, wzór nie ma więc istotnej treści. Definicja n pojawia się jednak dopiero pod koniec dowodu, dodatkowo poprzedzona słowem „But", sugerującym, że powinna ona być znana czytelnikowi.

- str. 39, l. 3 – Dla najmniejszej możliwej wartości indeksu n we wzorze występuje dzielenie przez zero. Ponadto zgodnie ze wzorem Eulera wykładnik przy potędze π powinien wynosić -2.

- str. 39, l. 14 – Przedział $(0, \alpha_i]$ powinien zostać zastąpiony przez $(0, \alpha_i)$.
- str. 40, l. ostatnia, str. 41, l. 6 – Zamiast Q_T we wzorach występuje Q_F.
- str. 43, l. 1, 2 – Dalszy tekst sugeruje, że założeniem w tej częsci pracy jest $\tilde{\alpha}_i \geqslant 1$, podczas gdy w tytule podrozdziału mamy $\alpha_i > 1$. Te dwie nierówności nie są równoważne.
- str. 44, l. 15 – W jednym z czynników wpisana jest niewłaściwa potęga $\tilde{\alpha}_i$ zamiast $\tilde{\alpha}_i - 1$.
- str. 47, l. 26 – Notacja $u_n(g, S)$ została jednorazowo skrócona do $u_n(S)$.
- str. 49, l. 2, 3 – Nie rozumiem dlaczego w tym przypadku także czynniki pozadiagonalne sa mniejsze niż δ, w pracy brak wyjaśnień. Na szczęście, nie wpływa to na poprawność całego dowodu, zwiększa tylko odpowiednie stałe.
- str. 49–51 – Doktorant stosuje w tym miejscu dowodu dość mylącą konwencję notacyjną, mianowicie rozbijając wielokrotną sumę na kilka rozłącznych sum, zależnych od struktury wielowskaźników, nie zaznacza tego w żaden sposób w notacji, formalnie wszystkie rozważane sumy są tożsame. Poprawna notacja powinna przykładowo zawierać odpowiedni indykator.
- str. 50, l. 23 – Zamiast $m = s_{p+1}$ (nie występującego w rozważanym iloczynie), powinno być $m = s_{p+2}$.
- str. 53, l. ostatnia – W rozważanym przypadku $\tilde{\alpha}_i^{-1} < 1$, co nie pozwala na wprowadzenie sumy pod potęgę. Zmienia to pewne wykładniki w dalszej części oszacowania, niemniej nie wpływa na ostateczną konkluzję.
- str. 54, l. 2 – Potęga δ w oszacowaniu nie zgadza się z (4.3.32), wpływa to jednak jedynie na wartość stałych.
- str. 55 – W zakresie sumowania wielokrotnie pojawia się $\rhd$ zamiast $\unrhd$ występującego w definicjach Q_B i R_{n+1}.
- str. 58, l. 22 – ψ_2 zostało zmienione na ψ_1.
- str. 58–62 – Ten złożony fragment dowodu nie jest poprzedzony żadnym wprowadzeniem, co czyni go dość niezrozumiałym. Przykładowo nie jest a priori jasne dlaczego zakłada się, że $k(p+1) > k(p)$ (potencjalnie może wystąpić równość). Brak jawnej zależności składników występujących w rozważanych sumach od wielowskaźników (pojawiający się już wcześniej w pracy) znajduje wprawdzie swoje uzasadnienie w chęci do uproszczenia notacji, ale przy tak skomplikowanych rachunkach powinien być dodatkowo skomentowany. W sumach częściowych tym razem pojawiają się indykatory, powinny być one jednak umieszczone wewnątrz sumy, gdyż warunki (a)-(e) zależą od zmieniających się indeksów s_i. Dodatkowo występują tu drobne konflikty oznaczeń, przykładowo symbol q został użyty już wcześniej. Kolejny, drobniejszy, zarzut, jaki mam do tej części pracy dotyczy nadużywania terminologii probabilistycznej w odniesieniu do rozważanych sum, warunki (a)-(e) zostają nazywane „zdarzeniami", oszacowania są określane jako „niezależne". Oczywiście można próbować

nadać sumom dodatkową probabilistyczną interpretację, jest to jednak niepotrzebne i mylące (zwłaszcza, że rozważane sumy częściowe nie będą wówczas niezależne, gdyż ich zakresy są powiązane).

- str. 61, l. 15 – Użycie słów „former" i „latter" jest mylące.
- str. 61, l. 16 – Drobna niespójność notacyjna, w jednej linii używana jest zarówno notacja $k(r)$, jak i k_r.
- str. 62, l. ostatnia – W ostatecznym oszacowaniu ψ_2 powinna zostać też uwzględniona stała związana z liczbą różnych „profili" wielowskaźników, podobnie jak wcześniej w dowodzie lematu 4.3.13.
- str. 63, l. 17, 22 – Wydaje się, że zamiast (4.3.32) używana tu jest nierówność (4.3.45).
- str. 69, lemat 5.2.5 – Permutacja σ zdefiniowana w dowodzie odpowiada σ^{-1} ze sformułowania lematu, problem ten pojawia sie też w dalszej części tekstu.
- str. 69, l. 37 – Zwrot „the maximal" sugeruje, że element maksymalny jest jedyny, co nie zawsze jest prawdą.

5. Podsumowanie

W rozprawie przedstawiono szereg trudnych wyników dotyczących ważnych aspektów współczesnej probabilistyki. Udowodnione twierdzenia mają dużą rangę naukową, są interesujące zarówno z punktu widzenia teorii, jak i możliwych zastosowań. Poziom skomplikowania technicznego przedstawionych dowodów jednoznacznie wskazuje na dużą sprawność techniczną Doktoranta, a zakres używanych metod na jego szerokie horyzonty matematyczne. W związku z tym, pomimo wspomnianych wyżej zastrzeżeń dotyczących brakującego założenia w rozdziale 5 oraz sposobu prezentacji wyników, jestem w pełni przekonany, że rozprawa spełnia ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim. Wnoszę o dopuszczenie mgr. Witolda Świątkowskiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Radosław Adamczak