Warszawa, 25 czerwca 2018

prof. dr hab. Rafał Latała
Instytut Matematyki
Uniwersytet Warszawski
ul. Banacha 2
02-097 Warszawa

Recenzja rozprawy doktorskiej mgra Piotra Dyszewskiego „Asymptotyczne własności modeli bazujących na transformacie gładzącej"

Omawiana rozprawa doktorska składa się ze wstępu i 4 prac:

[1] Ewa Damek, Piotr Dyszewski, *Iterated random functions and regularly varying tails*, arXiv:1706.03876,

[2] Gerold Alsmeyer, Piotr Dyszewski, *Thin tails of the nonhomogeneous smoothing transform*, Stochastic Processes and their Applications 127 (2017), 3014–3031,

[3] Dariusz Buraczewski, Piotr Dyszewski, *Precise large deviation estimates for branching processes in random enviroment*, arXiv:1706.03874,

[4] Dariusz Buraczewski, Piotr Dyszewski, *Precise large deviations for random walk in random enviroment*, arXiv:1710.01075.

Zgodnie z tytułem rozprawy, prace dotyczą analizy modeli probabilistycznych związanych z transformatą gładzącą, tzn. operatorem $\mathcal{S}$ na przestrzeni miar probabilistycznych na $\mathbb{R}$, określonym wzorem

$$\mathcal{S}\mu := \mathcal{L}\left(\sum_{k=1}^{N} A_k X_k + B\right),$$

gdzie $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi o rozkładzie μ, niezależnymi od wektora losowego $(B, N, A_1, A_2, \ldots)$. Punkty stałe tego odwzorowania, czyli miary probabilistyczne takie, że $\mathcal{S}\mu = \mu$, to rozkłady zmiennych spełniających afiniczne równanie stochastyczne

$$X \stackrel{d}{=} \sum_{k=1}^{N} A_k X_k + B, \tag{1}$$

gdzie $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi kopiami zmiennej X, niezależnymi od innych zmiennych w tym równaniu.

Pierwsze dwie prace [1] i [2] analizują asymptotykę rozwiązań (1), natomiast kolejne dwie [3] i [4] dotyczą pewnych modeli procesów gałązkowych i błądzeń losowych w losowym środowisku, przy badaniu których w naturalny sposób pojawiają się zmienne związane z transformatą $\mathcal{S}$ dla $N = 1$. Pokrótce omówię wyniki rozprawy.

Praca [1] zajmuje się problemem wyznaczenia dokładnej asymptotyki ogonów zmiennych X spełniających równanie rekursji losowej $X \stackrel{d}{=} AX + B$ oraz jego uogólnienie postaci $X \stackrel{d}{=} \Psi(X)$, gdzie Ψ jest funkcją losową niezależną od X, która się dobrze aproksymuje przez losową funkcję afiniczną $AX + B$. Skoncentrowano się na przypadku, gdy zmienne A i B mają porównywalne ogony - jak pokazano w Example 2, wtedy kluczowe dla asymptotyki X staje się badanie zależności między A i B. Theorem 1 podaje asymptotykę ogona rozwiązania rekursji losowej przy odpowiednich założeniach na regularność rozkładu A i zależność między ogonami $Ay + B$ oraz A (w Corollary 3 podano dość przyjemny warunek z którego można wywnioskować te zależności). Theorem 2 dotyczy ogólniejszej sytuacji, gdy zamiast $AX + B$ w równaniu jest funkcja losowa Ψ.

W pracy [2] pokazano wpierw (opierając się na prostym rozumowaniu z użyciem martyngałów), że jeśli $\mathbb{E}B = 0$, $\mathbb{E}|B|^p < \infty$ oraz $\mathbb{E}\sum_{k=1}^{N} |A_k|^p < 1$ dla pewnego $p \in [1, 2]$, to (1) ma jednoznaczne tzw. kanoniczne rozwiązanie W zadane przez odpowiedni nieskończony szereg. Dodając pewne naturalne założenia podano w Theorem 1 (i nieco bardziej szczegółowym Theorem 5) warunki równoważne istnieniu nietrywialnego momentu wykładniczego W. Następnie, zakładając dodatkowo, że $\sup_k |A_k| \leqslant 1$ p.n. scharakteryzowano w Theorem 2 i 3 obszar skończoności transformaty Laplace'a W. Najciekawszy i najbardziej delikatny w mojej opinii wynik tej pracy to Theorem 4, gdzie podano warunki (w terminach zachowania rozkładu $\sup A_k$ w otoczeniu 1) gwarantujące poissonowskie ogony zmiennej W. Wcześniej podobne wyniki dla rekursji losowych uzyskali Goldie i Grübel oraz Hitczenko i Wesołowski. Motywacją dla wyników tej pracy jest badanie asymptotyki ogona tzw. rozkładu Quicksort, który pojawia się jako granica odpowiednio znormalizowanego czasu działania algorytmu sortowania n-liczb. Asymptotykę rozkładu Quicksort wcześniej wyprowadził Janson, ale wyniki uzyskane przez autorów działają w większej ogólności, obejmując szerszą klasę równań (1).

W pracy [3] bada się procesy gałązkowe w losowym środowisku (PGLŚ), tzn. procesy $(Z_n)_{n\geqslant 0}$ określone wzorem

$$Z_0 = 1, \quad Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{Z_n} \xi_k^n, \; n = 0, 1, \ldots$$

gdzie dla każdego $n \geqslant 0$ zmienne $(\xi_k^n)_{k\geqslant 0}$ mają wartości naturalne, są niezależne i mają jednakowy rozkład Q_n. Losowe środowisko $\mathcal{Q} = (Q_n)_{n\geqslant 0}$ to ciąg niezależnych, jednakowo rozłożonych miar losowych na liczbach naturalnych. PGLŚ można uważać za uogólnienie klasycznego modelu Galtona-Watsona odpowiadającego przypadkowi jednopunktowego rozkładu miar Q_i. PGLŚ zostały wprowadzone przez Smitha i Wilkinsona w 1969 roku i były od tej pory badane przez wielu probabilistów. Główne wyniki pracy, sformułowane w Theorem 1 i 3 dotyczą precyzyjnej asymptotyki wielkich odchyleń dla Z_n oraz $W_n := \sum_{k=0}^n Z_n$, tzn. dokładnych oszacowań prawdopodobieństw $\mathbb{P}(Z_n \geqslant e^{\rho n})$ i $\mathbb{P}(W_n \geqslant e^{\rho n})$ przy $n \to \infty$. Asymptotyka ta zależy od zachowania zmiennej $A := \mathbb{E}[Z_1|Q_1] = \sum_{j=0}^\infty jQ_1(j)$. Warto dodać, że zarówno Theorem 1 jak i Theorem 3 mają zaskakująco proste założenia. Ponadto autorzy rozważają też w przypadku podkrycznym $\mathbb{E}\log A < 0$ (implikującym $\lim Z_n = 0$ p.n.) wielkie odchylenia dla pierwszego osiągnięcia przez procesy $Z = (Z_n)$ i $W = (W_n)$ poziomu t (Theorem 2 i 4). W badaniu procesów kluczowe role odgrywają zmienne $\Pi_n = \prod_{k=0}^n A_k$ i $R_n = \sum_{k=0}^n \Pi_{k-1}$ – oczywiście $\Pi_n = A_n\Pi_{n-1}$, zaś zmienne R_n mają ten sam rozkład co zmienne R_n^* spełniające rekursje losową $R_n^* = A_n R_{n-1}^* + 1$. Ponadto do zmiennych Π_n można stosować klasyczne oszacowania wielkich odchyleń Bahadura-Rao i Pietrowa.

W [4] analizowane są błądzenia losowe w losowym środowisku (BLLŚ). W tym modelu, najpierw losowo wybieramy środowisko, czyli ciąg $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, gdzie ω_n są niezależnymi zmiennymi losowych o jednakowym rozkładzie i wartościach w $(0, 1)$. Przy ustalonym środowisku ω, ciąg $(X_n)_{n\geqslant 0}$ jest błądzeniem losowym po $\mathbb{Z}$, startującym z 0 i przechodzącym ze stanu i do $i+1$ bądź $i-1$ z prawdopodobieństwami odpowiednio ω_i oraz $1-\omega_i$. Przy analizie BLLŚ kluczową rolę odgrywają zmienne losowe $A_n = \frac{1-\omega_n}{\omega_n}$ które mają oczywiście jednakowy rozkład. Jeśli $\mathbb{E}\log A_n < 0$, to zmienne X_n uciekają p.n. do nieskończoności, oraz jak wykazał Solomon (Annals of Probability 1975) spełnione jest mocne prawo wielkich liczb $\lim_{n\to\infty} X_n/n = v$ p.n. Kesten, Kozlov i Spitzer (Compositio Math. 1975) wykazali Centralne Twierdzenie Graniczne dla odpowiednio znormalizowanego $X_n - vn$. Następnie szereg autorów (Dembo, Peres, Pisztora, Povel, Varadhan, Zeitouni) dowodziło logarytmiczne szacowania wielkich odchyleń. W [4] udowodniono asymptotyczne dokładne oszacowania prawdopodobieństw wielkich odchyleń, zarówno w przypadku balistycznym, gdy $v > 0$ (Theorem 1) jak i podbalistycznym, gdy $v = 0$ (Theorem 2). Założenia obu twierdzeń dotyczą regularności rozkładu zmiennych A_n i są zaskakująco mało techniczne jak na tak dokładne szacowania. Dowody oparte są na analizie procesu gałązkowego z imigracją w losowym środowisku, który można stowarzyszyć z BLLŚ. Jak już było widać w [3] procesy takie są ściśle związane z rekursjami losowymi, a do badania ich precyzyjnej asymptotyki przydają się twierdzenia typu Bahadura-Rao.

Wszystkie prace są bardzo ładnie napisane, przedstawione problemy są naturalne i dobrze umotywowane. Uzyskane wyniki mają precyzyjne i całkiem eleganckie sformułowania (choć oczywiście w przypadku dokładnych oszacowań ogonów pewna techniczność założeń jest nie do uniknięcia). Szczegółowe dowody odłożono do dalszych części artykułów, a w pierwszych ich częściach skupiono się na przedyskutowaniu wyników, najważniejszych idei dowodów i podaniu przykładów, co znakomicie ułatwia lekturę. Mimo, że moja tematyka badawcza jest dość odległa od prac zebranych w rozprawie, czytałem je z zaciekawieniem i przyjemnością. Należy też wspomnieć, że podobną tematyką zajmuje się wielu probabilistów, a wyniki rozprawy często uogólniają rezultaty uzyskane wcześniej przez znakomitych matematyków.

Rozprawa jest bardzo obszerna, ma dobrze ponad sto, gęsto zadrukowanych, stron, zawiera wiele delikatnych rachunków i zróżnicowanych rozumowań. Nie miałem niestety czasu sprawdzić wszystkich dowodów, ze wszystkimi szczegółami przeczytałem pracę [2].

W [2] kluczowe jest szacowanie z góry transformaty Laplace'a Ψ zmiennej W. Równanie (1) implikuje, że funkcja Ψ spełnia równanie

$$\Psi(\theta) = \mathbb{E}\left[e^{\theta B} \prod_{k=1}^{N} \Psi(A_k \theta)\right]. \tag{2}$$

Proste, ale bardzo użyteczne spostrzeżenie, zawarte w Lemma 2, pokazuje, że jeśli pewna inna funkcja Φ jest tzw. superrozwiązaniem (2) na pewnym przedziale I zawierającym 0, to $\Psi \leqslant \Phi$ na I. Przy dowodzeniu poszczególnych twierdzeń trzeba oczywiście zgadnąć odpowiednio prostą funkcję Φ. Sformułowanie Lemma 2 jest odrobinę nieprecyzyjne, brakuje w nim założenia (potrzebnego, gdy T_k ma wartości poza $[0,1]$), że $T_k I \subset I$ p.n.

W [2] znalazłem też nieco innych usterek, nie mających jednak większego wpływu na poprawność dowodów. W Example 3 źle jest policzone $\mathbb{P}(U_1 U_2 \geqslant 1 - \delta)$, choć rząd wielkości się zgadza. W Example 4 nie rozumiem dlaczego w linii -6 str. 41 oszacowano $o(1)\theta_0^{-\alpha(n-1)}$ przez $o(1)$ przy $\theta_0 \to 0$. Na stronie 45 źle policzono trzecią pochodną funkcji G (co ułatwiło dalsze szacowania). Nierówność z linii -13 str. 46 wykorzystuje założenie, że nie zachodzi zdegenerowana sytuacja $N = 1$ i $|T_1| = 1$ p.n.. Na dole strony 48 w warunkach na ξ suprema powinny być brane po przedziale $[\theta_*, \theta^*]$. W szacowaniu (41) powinno być w dwóch miejscach $\zeta\theta^2\Sigma_2$ zamiast $\zeta\Sigma_2$, co wymusza nieco delikatniejsze dalsze szacowania (szczęśliwie czynnik $\xi\theta^q e^{b\theta}$ jest większy niż $\zeta\theta^2\Sigma_2$ dla $\theta > 1$ i odpowiednio dużego ξ).

Ogólnie jednak moje drobne zastrzeżenia nie wpływają na bardzo wysoką ocenę rozprawy. Szczególnie wartościowe wydają mi się wyniki [4] – błądzeniami losowymi w losowym środowisku zajmuje się wielu matematyków, Doktorantowi i jego Promotorowi udało się uzyskać bardzo głęboki i dalece nieoczywisty w mojej opinii rezultat.

Nie mam żadnych wątpliwości, że przedstawiona rozprawa spełnia z dużym naddatkiem wszelkie ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim. Wnoszę o jej przyjęcie i dopuszczenie magistra Piotra Dyszewskiego do dalszej części przewodu doktorskiego.

Na koniec chciałbym się odnieść do pytania o możliwość wyróżnienia recenzowanej rozprawy. Odpowiedź nieco utrudnia fakt, że wszystkie prace wchodzące w skład doktoratu są współautorskie, a wszyscy współautorzy są doświadczonymi matematykami, o uznanym w świecie dorobku. Z drugiej strony, nie często się zdarza, by doktorant, miał na etapie składania rozprawy, publikacje z poważanym matematykiem z ośrodka zagranicznego. Z dostarczonych mi wraz z rozprawą oświadczeń wnoszę też, że wkład mgra Dyszewskiego w powstanie w każdej z publikacji był bardzo znaczący, zdecydowanie przekraczający 50%. Biorąc pod uwagę wysoki matematyczny poziom, oraz różnorodność uzyskanych wyników i stosowanych technik, z pełnym przekonaniem, wnioskuję o wyróżnienie tej rozprawy.