Prof. dr hab. Romuald Lenczewski
Katedra Matematyki
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska

Recenzja rozprawy doktorskiej Lahcena Oussiego
Twierdzenia graniczne dla bm-niezależnych zmiennych losowych i zagadnienia pokrewne

Rozprawa doktorska Lahcena Oussiego, napisana pod kierunkiem dr hab. Janusza Wysoczańskiego, liczy 110 stron i składa się ze wstępu, 3 rozdziałów oraz bibliografii.

Rozprawa dotyczy analogonów pewnych twierdzeń granicznych związanych z modyfikacją (uogólnieniem) pojęcia niezależności monotonicznej w probabilistyce nieprzemiennej, wprowadzonej przez Murakiego w roku 2001, zwaną bm-niezależnością. Jak wiadomo, w probabilistyce nieprzemiennej istnieje kilka nierównoważnych pojęć niezależności. Najbardziej znanym pojęciem jest niezależność wolna Voiculescu (*freeness*), niemniej pojęcie niezależności monotonicznej też jest interesujące i ma ładne własności. Jest ono zdefiniowane w przypadku gdy zbiór I indeksujący rodzinę niezależnych podalgebr $\{\mathcal{A}_i : i \in I\}$ danej algebry z jednością $\mathcal{A}$ jest liniowo uporządkowany. Definicja sprowadza się do pewnej reguły rekurencyjnej na obliczanie momentów mieszanych zmiennych z tych podalgebr względem znormalizowanego funkcjonału liniowego φ na $\mathcal{A}$. Przytoczę tu (najprostszą) definicję, którą podałem w 2004r., opartą o zasadę rozszerzonej interpretacji lokalnego maksimum w ciągu indeksów:

$$\varphi(\cdots XYZ\cdots) = \varphi(Y)\varphi(\cdots XZ\cdots)$$

dla $X \in \mathcal{A}_i, Y \in \mathcal{A}_j, Z \in \mathcal{A}_k$, gdy $i < j$ oraz $j > k$, przy założeniu że maksimum może także wystąpić na końcu przedziału i wtedy jedna z nierówności nie jest brana pod uwagę.

Rozszerzenie niezależności monotonicznej do przypadku zbiorów częściowo uporządkowanych zostało zaproponowane przez Janusza Wysoczańskiego w pracy [IDAQP 2010], choć były też prace wcześniejsze dotyczące takiego modelu [IDAQP 2007, 2008]. Niezależność ta została nazwana niezależnością booleowsko-monotoniczną (w skrócie bm-niezależnością), ponieważ rozszerzenie niezależności monotonicznej polega tu na tym, że różne algebry, które są porównywalne w porządku zadanym na zbiorze I są względem siebie monotonicznie niezależne, natomiast gdy są nieporównywalne, to są względem siebie booleowsko niezależne. Niezależność booleowska jest z kolei pojęciem, które pojawiło się wcześniej i nawiązuje do pewnego iloczynu grup, zwanego regularnym iloczynem wolnym, wprowadzonego przez Marka Bożejkę.

Centralne twierdzenia graniczne dla zmiennych bm-monotonicznych były badane w różnych wersjach głównie w pracach Janusza Wysoczańskiego, ale Lahcen Oussi też ma tu swój wkład. Przykłady takich twierdzeń pojawiły się już w pracy z 2007r., dodatnie stożki symetryczne były badane w 2008r. i 2009r., natomiast pewne stożki niesymetryczne były badane w pracy Oussiego i Wysoczańskiego, przyjętej ostatnio do druku w PMS. Ten ostatni fakt warto podkreślić, zwłaszcza że praca ta nie wchodzi w skład rozprawy doktorskiej, aczkolwiek tematycznie do niej pasuje.

Rozdział I rozprawy doktorskiej Lahcena Oussiego jest dość obszerny i ma charakter ogólny, są tu podane podstawowe definicje i pojęcia probabilistyki nieprzemiennej, w tym te odnoszące się do tematyki rozprawy, jak również pewne fakty, które są dowodzone później.

W Rozdziale II przedstawiony jest pierwszy główny wynik rozprawy: twierdzenie typu małych liczb dla zmiennych bm-monotonicznych indeksowanych dyskretnym zbiorem $\mathbf{I}$ wziętym z pewnych stożków dodatnich Π (Twierdzenie 2.3.3). Rozważane są trzy typy stożków (Euklidesowe, Lorentza i dodatnio określone macierze symetryczne). W najprostszym, Euklidesowym przypadku, $\Pi = \mathbb{R}^d_+$, $\mathbf{I} = \mathbb{N}^d$. Wynik ten jest analogonem twierdzenia typu małych liczb z pracy Murakiego [IDAQP, 2001].

O ile u Murakiego badana jest asymptotyka momentów sum monotonicznie niezależnych zmiennych losowych

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i^{(n)}$$

przy założeniu małości $\lim_{n\to\infty} n\varphi((X_i^{(n)})^p) = \lambda > 0$ dla każdego $p \in \mathbb{N}$, o tyle w pracy Oussiego bada się asymptotykę momentów sum bm-niezależnych zmiennych losowych, indeksowanych nie przez liczby naturalne $n \in \mathbb{N}$, ale przez $\xi \in \mathbf{I}$, tzn.

$$S_\xi = \sum_{\rho\in[0,\xi]\cap\mathbf{I}} X_\rho^\xi$$

przy założeniu, że $\lim_{\xi\to\infty}(\sup_{\rho\in[0,\xi]\cap\mathbf{I}} v(\xi)\varphi((X_\rho^\xi)^p)) = \lambda > 0$ dla każdego $p \in \mathbf{I}$, gdzie $v(\xi)$ jest odpowiednio wyliczoną objętością przedziału $[0,\xi]$ zwaną charakterystyką objętościową stożka.

W obu przypadkach mamy trójkątne tabele zmiennych i ideologia jest podobna, ale, w porównaniu z pracą Murakiego, wzrasta złożoność obliczeniowa. Dowody Oussiego opierają się na kombinatoryce partycji nieprzecinających się, w których bloki są etykietowane elementami zbioru $\mathbf{I}$ w taki sposób, że "porządek częściowy w stożku jest kompatybilny z głębokością bloków". Rozkład graniczny jest opisany przez multitplikatywną rekurencję na pewną funkcję na zbiorze partycji nieprzecinającyh się $V(\pi)$. Jest to bm-odpowiednik rezultatu Murakiego, zmiana polega na tym, że wzór jest odpowiednio zmodyfikowany przez charakterystykę objętościową $v(\xi)$.

W rozdziale III znajduje się drugi główny wynik rozprawy: konstrukcja bm-analogonu rozkładu typu Poissona na dyskretnej bm-monotonicznej przestrzeni Focka, podobnej do dyskretnej monotonicznej przestrzeni Focka wprowadzonej przez Murakiego w 1999, przy pomocy pewnego ciągu operatorów oraz opis ich rozkładu granicznego (Twierdzenie 3.3.5). Konstrukcja przypomina tę zaproponowaną przez Murakiego, gdzie rozkład typu Poissona jest skonstruowany jako granica rozkładów ciągu operatorów będących odpowiednio znormalizowanymi sumami operatorów kreacji, anihilacji oraz liczby cząstek na dyskretnej monotonicznej przestrzeni Focka. W pracy Oussiego rozważane są analogiczne sumy, ale z normalizacją zadaną przez charakterystyki objętościowe stożków tych samych trzech typów, co w przypadku twierdzenia małych liczb.

Rozkłady graniczne są opisane przy pomocy nieprzecinających się partycji, które mają tylko bloki dwuelementowe lub singletony, które nie są blokami zewnętrznymi.

Uzyskane wyniki są według mojej wiedzy nowe i wartościowe. Są one naturalnymi odpowiednikami rezultatów Murakiego i w tym sensie można powiedzieć, że nie są zaskakujące. Niemniej, model niezależności badany przez Oussiego posiada bardziej złożoną strukturę z uwagi na zastąpienie liniowego porządku porządkiem częściowym. Fakt ten sprawia, że uzyskanie wyników staje się trudniejsze i wymaga umiejętnego zapanowania nad złożonością modelu, w tym odpowiedniego uwzględnienia wpływu charakterystyk objętościowych stożków na wyniki końcowe. Ten element wydaje się istotnym osiągnięciem kandydata do stopnia doktora. Rozprawa zawiera wiele dość szczegółowych dowodów algebraiczno-kombinatorycznych, które są w zdecydowanej większości przeprowadzone prawidłowo, choć mam tu także pewne uwagi, o których piszę poniżej.

Przedstawię teraz kilka tych ważniejszych, pozostałe załączam do recenzji. Tak więc, w dowodzie Lematu 2.4.3 jest pewien błąd: nie jest prawdziwe zdanie: "If, at some step, we get the factor $\varphi(Z_1)$, then we shall also have the factor $\varphi(Z_2)$". Niemniej, można ten błąd dość łatwo naprawić, lemat jest prawdziwy, tak więc jest to błąd bez konsekwencji. Druga uwaga dotyczy operatorów typu Poissona z Sekcji 3.3, które Kandydat omawia dość szczegółowo na stronach 84-91: operatory te są znane, pojawiły się już w pracy Murakiego (Ref.[26]) i większość wyników z tej Sekcji jest tam podana, w tym ich rozkład. Należałoby to w sposób jawny zaznaczyć, ponieważ można odnieść wrażenie, że wyniki te są elementem rozprawy. U Murakiego dowodu wprawdzie nie ma, jest natomiast zdanie, że łatwo jest obliczenia wykonać, podana jest funkcja generujaca momenty oraz miara. Rzeczywiście, można zauważyć, że Lemat 3.3.2 jest w zasadzie oczywisty, można więc jego (dość długi) dowód pominąć, zwłaszcza że za chwilę pojawia się w bardzo podobnej, ogólniejszej wersji (dla różnych ξ) jako Lemat 3.4.3. Z kolei rekurencję z Propozycji 3.3.1 też można bezpośrednio uzasadnić przy pomocy diagramów, nie jest potrzebny (bardziej skomplikowany) dowód ze strony 89. Proste wyliczenia dają wtedy Lemat 3.3.3. Tak więc, można zrozumieć, dlaczego Muraki dowodów nie zamieścił. Jeśli chodzi o Lemat 3.4.5, wydaje mi się, że można momenty odzworować na drogi Motzkina i wynik jest wtedy raczej jasny. Zaprezentowany dowód wydaje się być zbyt długi. Ogólniej, wydaje się, że rozprawa mogłaby być przedstawiona bardziej zwięźle, co byłoby dla niej korzystne. Badany model jest złożony, ale jednak nieco prostszy niż sugerują to niektóre rozbudowane dowody faktów, które nie są charakterystyczne dla modelu, ale mają bardziej ogólny charakter. Dotyczy to zwłaszcza rozdziału 3, który można byłoby skrócić o co najmniej 10 stron.

Od strony redakcyjnej, praca posiada dość częste usterki w postaci błędów gramatycznych, stylistycznych, literówek i interpunkcyjnych, typowych dla osób, dla których język angielski jest językiem obcym (w niekórych miejscach tekst wychodzi poza margines). Wymienienie ich wszystkich w tym miejscu nie byłoby możliwe i nie wydaje się konieczne. Czytając rozprawę, miałem wrażenie, że redakcji tekstu doktorant poświęcił jednak nieco zbyt mało uwagi lub że pracował pod presją czasu. Przypuszczam, że wysłanie wyników do redakcji czasopisma i uzyskanie recenzji pozwoliłoby wielu usterek uniknąć i poprawić jakość tekstu i jest to zawsze godne polecenia. Niemniej, mimo że uważam formę prezentacji za istotną, uznałem, że słabości tego typu są drugorzędnej wagi i przeszedłem nad nimi do porządku dziennego.

Pozwolę sobie przejść do konkluzji. Rozprawa Lahcena Oussiego, podobnie jak praca przyjęta do druku w PMS, dotyczy twierdzeń granicznych w modelu mieszanej niezależności w probabilistyce nieprzemiennej. Tematyka związków i interpolacji między różnymi pojęciami niezależności w tej teorii, jak również ich rozszerzeń, jak w tym przypadku niezależności monotonicznej, jest w moim przekonaniu istotna i aktualna. Jest wiele ośrodków na świecie, gdzie podobna tematyka jest uprawiana. Mamy też istotny wkład uczelni wrocławskich do problematyki niezależności. Wiadomo, że w centrum probabilistyki nieprzemiennej jest probabilistyka wolna Voiculescu, ale inne rodzaje niezależności, w tym niezależność monotoniczna i booleowska, też są często badane, i choć probabilistyka bm-monotonicza nie jest może w głównym nurcie badań, nie umniejsza to osiągnięcia Kandydata.

Wyniki przedstawione w pracy są według mojej wiedzy nowe i sądzę, że zostaną w niedalekiej przyszłości wysłane do czasopisma i opublikowane. Doktorant posiada już jedną pracę współautorską z tematyki CTG dla tego modelu, która jest przyjęta do druku, co należy ocenić pozytywnie, mimo że wyniki te nie wchodzą w skład rozprawy.

Jak już wspomniałem, model bm-niezależności badany od strony twierdzeń typu Poissona przez Lahcena Oussiego, jest złożony od strony technicznej (zwłaszcza kombinatorycznej, powiązanej z charakterystykami objętościowymi). Uzyskanie konkretnych rezultatów nie jest tu łatwe z uwagi na złożoność struktury, trzeba więc rozważać określone przypadki. Tak więc, wykazanie, że opis kombinatoryki rozkładów granicznych jest podobny do tego, który przedstawił Muraki dla niezależności monotonicznej, jest interesujące i w pewnym stopniu poszerza nasze rozumienie probabilistyki monotonicznej. Doktorant dobrze radzi sobie ze złożonością modelu, choć niektóre dowody można istotnie uprościć lub pominąć.

Uważam, że rozprawa Lahcena Oussiego spełnia ustawowe wymogi niezbędne do ubiegania się o stopień doktora nauk matematycznych i wnioskuję o dopuszczenie autora pracy do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Wrocław, 16.08.2019
Romuald Lenczewski

Lenczewski

Uwagi

1. Na stronie 6 pod całką powinno być $f(\omega)$.

2. Nieprecyzyjna jest definicja momentów mieszanych (Definicja 1.2.17), Powinno być raczej coś w rodzaju: *For given r.v.* $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$*, the family* $\{\varphi(a_{i_1} \cdots a_{i_k}) : 1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n, n \geq 1\}$ *is called the family of joint moments of* $a_1, \ldots, a_n$.

3. Na stronie 12 wydaje się, że powinna być mowa (linia 3) o *C^*-probability space*, a nie o *noncommutative probability space*, to ostatnie pojęcie jest czysto algebraiczne, a pojawiają się niżej takie pojęcia jak (zwarte) spektrum, twierdzenie Riesza, etc.

4. Nie jest dla mnie jasne, czy pojęcie *inner block* dla dowolnej partycji, tak jak to jest zdefiniowane w Definicji 1.5.1, wraz z definicją *outer block* jako bloku, które nie jest wewnętrzny, jest poprawne. Na pewno wszystko jest dobrze dla partycji z klasy NC i raczej przy tej klasie bym pozostał, zwłaszcza, że nic innego nie jest potrzebne.

5. W Uwadze 1.7.2, punkt (3) nie jest precyzyjny (nie można tu mówić o $d = 0$ jako szczególnym przypadku, bo $d \geq 1$, można jedynie powiedzieć, że akurat rekurencja dla liczb Catalana ma taką postać).

6. Na stronie 36 powinny być wszędzie n, a nie N.

7. Wydaje mi się, że pojęcie "monotone product of two basis vectors" nie jest potrzebne.

8. W Definicji 2.2.3 nie jest możliwe, aby dla $\rho \neq \rho'$ było $B(\rho) = B(\rho')$.

9. Definicje 2.2.3, 2.2.6 oraz 2.2.8 dobrze byłoby połączyć i zrezygnować z definiowania "label set of a partition" (2.2.6), zwłaszcza, ze wykorzystywany jest jedynie "label sequence of a partition" (2.2.8).

10. Na stronie 50, po Definicji 2.3.1, warto byłoby mówić o "rozkładzie π na nieredukowalne składowe".

11. W Sekcji 2.4.1 uważam, że skoro symbole $C(\mu_j)$ oraz $C(\mu)$ zależą od π, powinno być to jednak napisane, tzn. $C(\mu_j, \pi)$ oraz $C(\mu, \pi)$.

12. Na stronie 55, nierówność na $C(\mu)$ nie zachodzi dla wszystkich ξ , ale dla odpowiednio dużych, to trzeba zaznaczyć; nieco niżej w granicy brakuje czynnika 2.

13. Niezbyt klarowna jest argumentacja pod wzorem (2.17) w dowodzie Lematu 2.4.5, niemniej jest to być może jedynie niezręczność językowa, lemat jest prawdziwy.

14. We wzorze (3.2) powinno być $V(\lambda, \pi)$.

15. W Definicji 3.1.2 powinno być $\pi = \{B_1, \ldots, B_k\}$, a pod koniec definicji powinno być η zamiast μ.

16. Wydaje mi się, że w Uwadze 3.1.4 nie jest prawdą, że zbiory, o których tu mowa, się pokrywają, choć mają rzeczywiście taką samą liczbę elementów, co wystarcza.

17. Wydaje mi się, że w Rozdziale 3.2.1 należy założyć, że $g_\xi \perp \Omega$. Skądinąd wtedy Uwaga 3.2.1 jest zbędna, ponieważ w wyliczeniach się nie pojawia ten przypadek (w pracy Wysoczańskiego sa ogólniejsze operatory i tam taka uwaga jest zasadna). Jeżeli z kolei nie zakładałoby się, że $g_\xi \perp \Omega$, co jest możliwe, to nie zgadzają się pewne dalsze wyliczenia, więc sądzę, że jednak to założenie jest robione.

18. Jeżeli sprzężenie w iloczynie skalarnym jest na drugiej osi, tak jak pokazują wyliczenia ze strony 76, to operatory anihilacji nie są liniowe, potrzebne jest więc ustalenie jednolitej konwencji, na której osi jest sprzężenie.