

Prof. dr hab. Tomasz Byczkowski
Instytut Matematyczny PAN
Oddział we Wrocławiu

Wrocław, 19. X. 2017 r.

**Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Krystiana Bekąły
"Rachunek symboliczny oraz splotowe półgrupy miar
na grupie Heisenberga"**

Rozprawa doktorska mgr Krystiana Bekąły dotyczy *rachunku symbolicznego operatorów pseudoróżniczkowych* działających w sposób splotowy na grupie Heisenberga.

Grupa Heisenberga jest klasycznym obiektem geometrii i analizy; ze względu na jej fundamentalne znaczenie w analizie harmonicznej i różnorodne zastosowania była obiektem intensywnych badań, zarówno od strony geometrycznej jak też pod kątem analizy harmonicznej. Badania te mają długą tradycję; były od dawna prowadzone przez grupę prof. Andrzeja Hulanickiego; w kontekście operatorów różniczkowych czy też pseudoróżniczkowych. Promotor mgr Bekąły, prof. Paweł Głowacki jest wybitnym specjalistą i współtwórcą w dziedzinie rachunku symbolicznego operatorów pseudoróżniczkowych na grupie Heisenberga czy też ogólniej: na grupach jednorodnych.

Recenzowana rozprawa doktorska dotyczy w głównej mierze rachunku symbolicznego operatorów pseudoróżniczkowych na grupie Heisenberga. Otrzymane w rozprawie wyniki w tym zakresie zastosowane są następnie do badania półgrup splotowych miar probabilistycznych na grupie Heisenberga. Zrealizowany został tutaj dość zaskakujący program badań a mianowicie porównanie dwóch w istocie różnych półgrup miar: na n -wymiarowej grupie Heisenberga oraz w przestrzeni euklidesowej odpowiedniego wymiaru. Półgrupy te zadane są poprzez ten sam generator infinitezymalny określony za pomocą swojej (euklidesowej) transformaty Fouriera. Ponieważ mamy jednak inne działania grupowe więc otrzymujemy w każdym przypadku inną półgrupę (splotową) miar.

Zastosowanie wyników dotyczących rachunku symbolicznego pozwala na oszacowanie różnicy półgrup. Dodatkowo, mamy bardzo precyzyjne oszacowania wzrostu półgrup w przypadku euklidesowym. To wszystko pozwala na dokładne

oszacowanie gęstości półgrupy miar na grupie Heisenberga. Główny wynik to Twierdzenie 8.2.2. Podaje ono bardzo precyzyjne oszacowania na pochodne różnicy gęstości półgrup, zarówno dla argumentu przestrzennego $\|x\|$ jak i czasowego t (półgrupowego). Z twierdzenia tego wynika szereg ważnych wniosków, między innymi oszacowania dla gęstości półgrupy na grupie Heisenberga. Aby jednak udowodnić powyższe twierdzenie trzeba było zbudować całą teorię rachunku symbolicznego dla operatorów spłotowych na grupie Heisenberga. Było to duże wyzwanie; wymagało wielkiej pracy i kompetencji. I z całą pewnością jest to wielka zasługa mgr Bekąły. Uważam, że rozprawa jest bez wątpienia wyróżniająca, zasługuje na Nagrodę Ministra. Mocną stroną rozprawy jest strona redakcyjna. Bardzo przejrzysty układ, obszerny wstęp, pozwalają na przebrnięcie przez niezwykle techniczne i skomplikowane aspekty teorii rachunku symbolicznego. Jest to zapewne też zasługa promotora, prof. Głowackiego. W całej rozprawie znalazłem jedynie parę drobnych usterek/pomyłek, głównie „komputerowych”. Nie ma to żadnego wpływu na bardzo wysoką ocenę rozprawy; zarówno pod względem merytorycznym jak i redakcyjnym.

Praca moim zdaniem wnosi istotny wkład do tematyki rachunku symbolicznego operatorów spłotowych i półgrup spłotowych na grupie Heisenberga i spełnia wszelkie warunki ustawowe i zwyczajowe stawiane rozprawom doktorskim. Wnoszę o dopuszczenie mgr Krystiana Bekąły do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Ponadto stawiam wniosek o wyróżnienie rozprawy Nagrodą Ministra.

Tomasz Byczkowski



Lista dostrzeżonych usterek redakcyjnych, błędów językowych/"maszynowych"

1. Str 2_7, 2_9: brak informacji/oznaczenia, że $\nu_t(x)$ jest gęstością miary μ_t ; to samo na następnej stronie
2. Str 10_15: powinno być: „... funkcja ujemnie określona $\psi...$ ” – brak nazwy obiektu który definiujemy; podobna usterka pojawia się w wielu następnych definicjach, nie będą się powtarzała...
3. Str 11_1: brak objaśnienia, że ρ_t jest gęstością μ_t
4. Str 12_14: powinno być „funkcję” zamiast „funkcją”
5. Str 12_15: zamiast wykładnika $1/\theta$ przy zmiennej „t” (w δ_t) powinien być wykładnik $1/\alpha$
6. Str 32^8: zamiast „operatoe” powinno być „operator”
7. Str 35_8: we wzorze na komutator δ_1, δ_2 , pod znakiem sumy, po znaku „-”, chyba powinno być $\delta_{2,j}$ zamiast $T_{2,j}$
8. Str 69_7: powinno być „ogólności” zamiast „ogólności”

Ponadto, w języku polskim (matematycznym) nie ma odpowiednika „Proposition”; chyba najlepiej pisać jednak „Lemat” albo „Twierdzenie pomocnicze” czy coś w tym rodzaju. Bezpośrednie tłumaczenie „Propozycja 2.1” nie jest przyjęte. Także nazwa „splotniki” nie wydaje się zbyt szczęśliwa. Rozumiem, że „konwolwery” nie brzmiało by zbyt dobrze. „Konwolutory” jest z kolei chyba pojęciem już zarezerwowanym. Gdyby rozprawa była w języku angielskim to rzecz jasna nie byłoby tych uwag.