Wrocław, 30.06.2018

dr hab. inż. Zbigniew Michna, prof. UE
Katedra Matematyki i Cybernetyki
Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Joanny Tumilewicz pt. „Optimal stopping problems: insurance-financial products and American options"

Rozprawa mgr Joanny Tumilewicz zajmuje się wyceną instrumentów pochodnych i wyznaczaniem optymalnych czasów zatrzymań dla instrumentów pochodnych typu amerykańskiego. Podjęta tematyka jest jedną z najbardziej popularnych wśród problemów probabilistyki stosowanej i jej rozwój jest bardzo szybki. Głównym celem pracy jest wycena bezterminowych opcji amerykańskich z ujemną stopą wolną od ryzyka i znalezienie dla nich optymalnych momentów wykonania. Ujemna stopa wolna ryzyka pojawia się przy problemie wyceny tzw. złotych pożyczek lub pożyczek akcyjnych, gdzie wycena takiej opcji po prostych przekształceniach sprowadza się do zwykłej bezterminowej opcji amerykańskiej z ujemną stopą wolną od ryzyka. Ponadto w podobny sposób wyceniane są i znajdowane są optymalne momenty wykonania dla tzw. opcji swing, gdzie jest N czasów wykonania w minimalnych odstępach ustalonych w umowie opcyjnej. Praca zajmuje się również kontraktami ubezpieczeniowo-finansowymi, których funkcja wypłaty oparta jest na wartościach procesów drawdown lub drawup tzn. różnicą pomiędzy historycznym maksimum logarytmu ceny instrumentu bazowego a logarytmem jego aktualnej ceny lub różnicą logarytmu jego aktualnej ceny i historycznego minimum logarytmu ceny. Dla tych kontraktów poza ceną i optymalnym czasem wykonania znaleziona zostaje tzw. uczciwa składka tzn. składka przy której cena kontraktu wynosi zero. Dużą zaletą pracy jest bardzo szeroki wachlarz procesów jakie mogą być użyte do modelowania ceny aktywa bazowego a mianowicie są to geometryczne asymetryczne procesy Lévy'ego tzn. procesy, które albo mają tylko skoki w dół (spektralnie ujemne) albo mają tylko skoki do góry (spektralnie dodatnie).

Przechodząc do szczegółów praca składa się z 3 głównych rozdziałów, wstępu, pojęć wstępnych i bibliografii. We wstępie zarysowany zostaje problem i streszczone są główne wyniki teoretyczne. W pojęciach wstępnych przedstawione są procesy

Z. Michna

Lévy'ego i ich podstawowe własności fluktuacyjne wyrażone poprzez funkcje skalujące. Ponadto lemat „zgadnij i sprawdź" jest cytowany, który jest podstawowym narzędziem przy znajdowaniu optymalnych czasów zatrzymań. Następnie omawiane są przykłady procesów Lévy'ego ujemnie spektralnych tzn. proces Wienera, złożony proces Poissona i złożony proces Poissona zaburzony procesem Wienerem. Rozkłady skoków złożonego procesu Poissona jakie są stosowane w pracy są typu fazowego i ostatni podrozdział wprowadza te rozkłady.

Pierwszy z głównych rozdziałów zajmuje się amerykańskimi bezterminowymi opcjami amerykańskimi z ujemną stopą wolną od ryzyka. Ta część jest rozszerzeniem pracy Xia i Zhou i prac Battauz i in., gdzie podobne instrumenty są badane ale tylko dla aktywa bazowego modelowanego geometrycznym ruchem Browna. Punktem wyjścia jest tzw. złota pożyczka, gdzie inwestor pożyczając pieniądze zastawia złoto. Do tego dochodzi stopa oprocentowania pożyczki i koszty ubezpieczenia i przechowywania złota. Pożyczkobiorca może w dowolnej chwili oddać pożyczkę i wykupić złoto. Cena takiego instrumentu po prostych przekształceniach jest ceną amerykańskiej opcji sprzedaży z ujemną stopą wolną od ryzyka i trochę innym procesem opisującym cenę aktywa bazowego. Tu wydaję się, że przejście na miarę martyngałową będzie rozwiązaniem innego problemu niż złota pożyczka ale zmiana procesu opisującego cenę aktywa bazowego tylko poprzez dyskontowanie nie ma znaczenia (zgodnie z pierwszym fundamentalnym twierdzeniem matematyki finansowej aby wycenić wypłatę trzeba znaleźć miarę martyngałową względem, której zdyskontowany proces ceny waloru podstawowego jest martyngałem). W tym rozdziale proces opisujący cenę aktywa bazowego jest spektralnie ujemnym albo dodatnim procesem Lévy'ego. Kluczowy jest tutaj Lemat 1.3.2, który wyznacza wartość oczekiwaną wypłaty dla opcji sprzedaży wykonanej dla czasu zatrzymania będącego pierwszym czasem wejścia do przedziału (podwójny obszar kontynuacji dla opcji amerykańskich). Dowód lematu oparty jest na analizie trajektorii i łącznym rozkładzie czasu wejścia i pozycji procesu. Następnie pokazane zostają warunki ciągłego i gładkiego dopasowania dla ceny bezterminowej amerykańskiej opcji sprzedaży. W dalszej części rozdziału bezterminowe opcje swing są rozpatrywane. To znaczy mamy możliwość wykonania opcji N razy w odstępach czasu nie mniejszych niż pewne ustalone wartości w umowie. Problem zostaje rozwiązany rekurencyjnie a następnie pokazane jest, że optymalne czasy zatrzymań są kolejnymi czasami wejść do pewnych rosnących odcinków. W ostatnim teoretycznym podrozdziale rozważane są amerykańskie opcje kupna, dla których zostaje znaleziona cena w formie ceny amerykańskiej opcji sprzedaży ale z inną miarą Lévy'ego procesu Lévyego opisującego cenę aktywa bazowego (tzw. symetria sprzedaży-kupna). Ponadto wyznaczone są optymalne czasy zatrzymań dla amerykańskich opcji kupna. Podobnie symetria sprzedaży-kupna zostaje rozszerzona na opcje swing. W przykładach numerycznych brane są pod uwagę proces Wienera i proces Wienera zaburzony złożonym procesem Poissona ze skokami o rozkładach wykładniczych. Dla tych procesów opisujących aktywo bazowe znalezione zostają ceny amerykańskiej opcji sprzedaży z ujemną stopą wolną od ryzyka i optymalne czasy wykonania dla opcji swing.

Rozdział drugi zajmuje się kontraktami ubezpieczeniowymi opartymi na cenie aktywa bazowego. Wychodzi się od najprostszych kontraktów a przez dodanie pewnych

Z. Michna

możliwości rozpatrywane kontrakty są coraz bardziej skomplikowane. W przeciwieństwie do poprzedniego rozdziału cena aktywa bazowego jest opisana tylko poprzez geometryczny spektralnie ujemny proces Lévy'ego. Pierwszy z badanych kontraktów to tzw. kontrakt drawdown. Ubezpieczający ubezpiecza się przed dużą wartością procesu drawdown czyli różnicą pomiędzy historycznym maksimum i wartością bieżącą logarytmu ceny (logarytmicznym zwrotem ceny). Dopóki wartość drawdown nie osiągnie ustalonej w kontrakcie wartości ubezpieczający płaci regularnie składkę. W momencie osiągnięcia ustalonej wartości przez proces drawdown kontrakt się kończy i ubezpieczony otrzymuję kwotę ubezpieczenia zawartą w umowie. Dla tego kontraktu zostaje wyznaczona jego cena i sprawiedliwa składka. Następnie do poprzedniego kontraktu zostaje dodana możliwość zakończenia kontraktu w dowolnej chwili przed osiągnięciem ustalonej wartości przez proces drawdown co oznacza, że ubezpieczony wątpi w osiągnięcie ustalonej w umowie wartości przez proces drawdown. Tak więc pojawia się tu problem optymalnego zatrzymania, który zostaje rozwiązany przy użyciu tzw. lematu sprawdzającego. W następnym podrozdziale do kontraktu ubezpieczeniowego ze składką i wypłatą w momencie osiągnięcia pewnej wartości przez proces drawdown zostaje dodana możliwość zakończenia kontraktu, gdy proces drawup osiągnie pewną wartość wcześniej niż proces drawdown. Dokładniej ubezpieczony nie chce płacić składek, gdy ceny aktywów na rynku idą w górę (proces drawup to różnica pomiędzy bieżącą wartością logarytmu ceny a historycznym minimum logarytmu ceny - logarytmiczny zwrot ceny aktywa bazowego). Podobnie jak w pierwszym podrozdziale zostaje wyznaczona cena i sprawiedliwa składka dla tego kontraktu ubezpieczeniowego. Wreszcie do kontraktu drawdown i drawup dodana zostaje możliwość zakończenia kontraktu w dowolnej chwili przed osiągnięciem ustalonych wartości przez proces drawdown i drawup płacąc za to pewną karę ustaloną w kontrakcie. Korzystając z lematu sprawdzającego i metody „zgadnij i sprawdź" zostaje wyznaczony optymalny czas zakończenia kontraktu a tym samym zostaje wyznaczona jego cena i sprawiedliwa składka. Osobno zostaje rozpatrzony przypadek, gdy poziom graniczny dla procesów drawdown i drawup w umowie jest taki sam. Wtedy cena kontraktu może być zapisana w bardziej jawnej postaci. Cześć numeryczna rozdziału zaczyna się od procesu Wienera tzn. aktywo bazowe jest modelowane geometrycznym ruchem Browna. Dla kontraktów ubezpieczeniowych autorka bada zależność sprawiedliwej składki od wartości początkowej procesów drawdown i drawup, gdzie potwierdzają się intuicje np. wartość składki dąży do nieskończoności, gdy wartość początkowa procesu drawdown zbliża się do wartości procesu drawdown kończącej kontrakt i dającej kwotę ubezpieczenia ubezpieczonemu (wtedy moment wypłaty ubezpieczenia zbliża się do zera). Doktorantka również wyznacza optymalne czasy zatrzymań dla kontraktów z taką możliwością np. dla różnych pozycji startowych drawdown i drawup. Podobnie dla aktywa bazowego opisywanego przez geometryczny złożony proces Poissona ze skokami wykładniczymi (model Craméra-Lundberga) wyznaczane są sprawiedliwe składki i optymalne czasy zakończenia kontraktu. Zastanawiające jest, że tu nie ma podobnej zbieżności wartości składki do nieskończoności, gdy $d \uparrow a$ (czy jest to różnica pomiędzy własnościami trajektorii ruchu Browna a złożonego proceseu Poissona, gdy $t \to 0$?). W części ostatniej powięconej przykładom numerycznym proces ceny aktywa bazowgo

Z. Lei Sm

jest opisywany przez geometryczny złożony proces Poissona ze skokami o rozkładzie Erlanga i hiperwykładniczym zaburzony procesem Wienera. Podobnie jak w poprzednich podrozdziałach wyznaczane są ceny kontraktów i optymalne czasy zatrzymania. Dla kontraktów z możliwością zakończenia kontraktu (płacąc karę) podobnie jak w poprzednich przykładach moment zatrzymania nie zależy od pozycji startu procesu drawdown i drawup.

W rozdziale trzecim analizowane takie same kontrakty jak w poprzednim rozdziale ale wartość ubezpieczenia (nagroda) nie musi być stała natomiast zależy od wartości procesu drawdown w momencie przekroczenia ustalonej wartości przez proces drawdown. Dla kontraktów z możliwością zakończenia ich w dowolnym momencie wielkość kary jest funkcją procesu drawdown w chwili anulowania kontraktu. W ostatniej części rozdziału doktorantka prezentuje przykłady numeryczne dla geometrycznego ruchu Browna, złożonego procesu Poissona ze skokami wykładniczymi i złożonego procesu Poissona zaburzonego procesem Wienera. Pojawiające się na początku rozdziału trzeciego definicje pojęć, które były w poprzednich rozdziałach zakłócają logikę struktury rozprawy.

Reasumując podjęta tematyka rozprawy jest jedną z najbardziej eksploatowanych dziedzin probabilistyki stosowanej, gdzie konkurencja jest bardzo duża. Literatura rozprawy zawiera 79 pozycji (pozycje [51] i [52] są takie same) i są to głównie publikacje z najlepszych czasopism probabilistyki stosowanej i modelowania stochastycznego w finansach i ubezpieczeniach. Ponadto cytowane artykuły są głównie nowymi pozycjami opublikowanymi kilka do kilkunastu lat temu co potwierdza, że temat pracy jest aktualny i cieszący się zainteresowaniem wśród probabilistów. Doktorantka cytuje pięć artykułów, których jest współautorem. Na uwagę zasługują publikacje doktorantki w Insurance: Mathematics and Economics i Applied Mathematics and Optimization. Podsumowując doktorantka prezentuje oryginalne wyniki, które są interesujące z matematycznego punktu widzenia jak również mające zastosowanie w finansach i ubezpieczeniach. Autorka wykazała się dużo wiedzą z teorii fluktuacji procesów Lévy'ego. Dowody oparte są na głębokiej analizie trajektorii procesów stochastycznych przy sprawnym stosowaniu twierdzeń z teorii fluktuacji i optymalizacji i wykorzystaniu np. takich pojęć jak generator półgrupy przejść procesu Markowa. Na pochwałę zasługuje bogaty wachlarz procesów stochastycznych, jakie zostały użyte do modelowania ceny aktywa bazowego jak również liczba analizowanych kontraktów ubezpieczeniowych i instrumentów pochodnych. Ponadto doktorantka wykazała się umiejętnościami aplikacyjnymi poprzez różnorodne przykłady numeryczne, które z pewnością mają wartość użyteczną. Tak więc kończąc, rozprawa spełnia wymagania stawiane dysertacjom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie mgr Joanny Tumilewicz do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Szczegółowe uwagi:

- wydaję się, że nierówność w definicji czasu zatrzymania $\tau_D^-(a)$ na str. 6 powinna być nieostra (tak wynika z dowodu Prop. 2.2.1);
- brakuje w kilku miejscach założenia, że $d < a$;
- brakuje założenia, że $\theta < d$ w rów. (0.9);

Z. Lu...

- czym jest q w definicji ζ na str. 18?;
- opis rozkładów fazowych jest niesatysfakcjonujący;
- γ na str. 19 nie jest wektorem z jakiego startuje proces Markowa a rozkładem punktu startowego;
- wzór (0.33) błędny;
- w Tw. 1.4.3 można by napisać, że $\tilde{W}^{(N)}(s) = \tilde{V}^{(N)}(s)$;
- Cardano str. 44;
- ostatnie rów. str. 44 niepoprawne;
- ostatnie rów. str. 45 - nawiasy;
- w rozdziale drugim, części numerycznej dla ruchu Browna nie jasne czym jest dokładnie μ tzn. czy $\mu = r - \delta + \sigma^2/2$, podobnie dla następnych przykładów;
- str. 72, z Rys. 2.11 wynika raczej $\theta^* = 2.5$;
- str. 80, l. 6 od dołu, dla X_t będącego złożonym procesem Poissona (proces Craméra-Lundberga) gęstość nie istnieje, bo złożony proces Poissona ma zawsze atom w zerze;
- na Rys. 3.1, 3.4, 3.8, 3.12, również str. 102, l. 3 i 4 nie jest jasne oznaczenie $p = p^*()$ - wartość kontraktu dla p^* wynosi zero.

Zbigniew Michna

Z. Michna