Promotor: prof. dr hab. Piotr Śniady Agnieszka Czyżewska–Jankowska

Nieorientowalne mapy i kombinatoryka wielomianów Jacka

STRESZCZENIE

W rozprawie zajmujemy się kombinatoryką wielomianów Jacka, które są pewną rodziną symetrycznych wielomianów. Sprawdzamy hipotezę dotyczącą związku współczynników tych wielomianów z dwudzielnymi grafami.

Lassalle [Las08, Las09] zainicjował tego typu badania rozważając współczynnik przy $p_{\pi,1,1,\ldots}$ w rozwinięciu wielomianów Jacka w bazie potęgowych wielomianów symerycznych. Po odpowiedniej normalizacji tych współczynników otrzymujemy wielkości $\mathrm{Ch}_\pi^{(\alpha)}(\lambda)$ zwane *charakterami Jacka*. Są one uogólnieniem *znormalizowanych charakterów grup permutacji*.

Jedną z najbardziej interesujących własności charakterów Jacka jest to, że można wyrazić je w postaci wielomianów w tzw. *wolnych kumulantach*, będących w miarę prostymi funkcjonałami kształtu diagramu Younga λ. Takie wyrażenie nazywamy *wielomianem Kerova*, które przyjmuje szczególenie prostą postać [Bia03]. W rozprawie badamy związek między kombinatoryką współczynników wielomianów Kerova dla charakterów Jacka z grafami zwudzielnymi. Grafy te będą miały dodatkową strukturę, tzn. będą to nieorientowalne mapy. Z grubsza mówiąc są to dwudzielne grafy narysowane na niezorientowanych powierzchniach. W pracy przedstawiamy konkretene formuły na współczynniki charakterów Jacka zależące od ilości map pewnego specjalnego typu.

Dla danej mapy M Dołęga, Feray i Śniady [DFŚ14] zdefiniowali ciekawą wielkość $\mathrm{mon}_M(\gamma)$ zwaną *miarą nieorientowalności* M, która w pewnym sęsie mierzy jak bardzo dana mapa M jest nieorientowalna. Przypuszczamy, że wielkość ta ma kluczowe znaczenie do zrozumienia kombinatoryki charakterów Jacka.

Dołęga, Feray i Śniady [DFŚ14] zdefiniowali następujący szereg $\widehat{\mathrm{Ch}}_{\pi}^{(\alpha)}(\lambda)$:

$$\widehat{\mathrm{Ch}}_{\pi}^{(\alpha)}(\lambda) := (-1)^{\ell(\pi)} \sum_{M} \mathrm{mon}_M \ \mathfrak{N}_M(\lambda), \tag{1}$$

gdzie suma przebiega wszystkie nieorientowalne mapy M z typem ściany π, a $\mathfrak{N}_M(\lambda)$ jest liczbą pewnych zanurzeń mapy M w diagram Youna λ. W pracy bardzo szczegółowo analizujemy ten szereg.

Głównym wynikiem rozprawy jest to, że jeśli ograniczymy się do map małych genusów, charaktery Jacka są równe powyższemu szeregowi $\widehat{\mathrm{Ch}}_{\pi}^{(\alpha)}(\lambda)$. Definiujemy $\widehat{\mathrm{Ch}}_{n}^{(\alpha),g}$ w następujący sposób:

$$\widehat{\mathrm{Ch}}_{n}^{(\alpha),g}(\lambda) := (-1) \sum_{M} \mathrm{mon}_M \ \mathfrak{N}_M(\lambda), \tag{2}$$

gdzie suma przebiega wszystkie nieorientowalne mapy M z jedną ścianą (n) i w genusie g. Wyrażenie to jest obcięciem (1), do zbioru map danego genusu g. Rozważamy następującą hipotezę:

Hipoteza 1. *Dla genusu* $g \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right\}$ *i dowolnego naturalnego* $n \geq 1$ *mamy równość:*

$$\mathrm{Ch}_{n}^{(\alpha),g} = \widehat{\mathrm{Ch}}_{n}^{(\alpha),g}.$$

Pokazujemy, że Hipoteza 1. jest prawdziwa dla map genusów 0, $\frac{1}{2}$ i 1. Wyprowadzamy również dokładne formuły dla współczynników wielomianów Kerova dla szeregu $\widehat{\mathrm{Ch}}_{n}^{(\alpha)}$ dla genusów 0, $\frac{1}{2}$, 1 oraz $\frac{3}{2}$. Są one zgodne z formułami dla $\mathrm{Ch}_{n}^{(\alpha)}$ przewidywanymi przez Lassalla w [Las09, Conjecture 11.2, 11.3].

References

[Bia03] Philippe Biane. Characters of symmetric groups and free cumulants. In *Asymptotic combinatorics with applications to mathematical physics (St. Petersburg, 2001)*, volume 1815 of *Lecture Notes in Math.*, pages 185–200. Springer, Berlin, 2003.

[DFŚ14] Maciej Dołęga, Valentin Féray, and Piotr Śniady. Jack polynomials and orientability generating series of maps. *Sém. Lothar. Combin.*, 70:Art. B70j, 50, 2014.

[Las08] Michel Lassalle. A positivity conjecture for Jack polynomials. *Math. Res. Lett.*, 15(4):661–681, 2008.

[Las09] Michel Lassalle. Jack polynomials and free cumulants. *Adv. Math.*, 222(6):2227–2269, 2009.