Streszczenie

Niech X będzie przestrzenią metryczno-miarową wyposażoną w standardową metrykę euklidesową i miarę μ. Rozważamy nieujemny i samosprzężony operator L na $L^2(X,\mu)$. Oznaczmy przez T_t półgrupę operatorów $\exp(-tL)$ związaną z L. Przestrzeń Hardy'ego jest zdefiniowana następująco. Mówimy, że funkcja $f \in L^1(X,\mu)$ należy do przestrzeni Hardy'ego $H^1_L(X,\mu)$, wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja maksymalna $\sup_{t>0} |T_t f|$ należy do $L^1(X,\mu)$. W niniejszej rozprawie doktorskiej zajmujemy się trzema zagadnieniami dotyczącymi przestrzeni Hardy'ego $H^1_L(X,\mu)$.

W pierwszej części pracy otrzymujemy twierdzenia o rozkładzie atomowym przestrzeni $H^1_L(X,\mu)$. Oznacza, to, że każdą funkcję $f \in H^1_L(X,\mu)$ można przedstawić za pomocą szeregu $f = \sum_k \lambda_k a_k$, gdzie $\lambda_k \in \mathbb{C}$, $\sum_k |\lambda_k| < \infty$ oraz a_k są atomami. Atomy są funkcjami, które spełniają pewne warunki lokalizacji, wielkości oraz skracań. W rozprawie doktorskiej rozważamy atomy związane z pewną rodziną kostek $\mathcal{Q}$, która jest pokryciem X, i definiujemy je następująco. Funkcję a nazywamy atomem, jeśli istnieje kostka $K \subset Q \in \mathcal{Q}$ taka, że: supp $a \subset K$, $\|a\|_\infty \leq \mu(K)^{-1}$, $\int a\, d\mu = 0$ lub, alternatywnie, $a = \mu(Q)^{-1}\mathbb{1}_Q$ dla $Q \in \mathcal{Q}$. Zakładajac pewne warunki dla operatora L oraz pokrycia $\mathcal{Q}$ udowadniamy, że przestrzeń Hardy'ego można scharakteryzować za pomocą rozkładu atomowego, z atomami zdefiniowanymi jak wyżej. Szczególnie interesują nas rozkłady atomowe przestrzeni Hardy'ego związanych z wielowymiarowymi wersjami operatorów Bessela, Laguerre'a i Schrödingera.

Drugie zagadnienie dotyczy charakteryzacji przestrzeni Hardy'ego $H^1_L(X,\mu)$ za pomocą pewnych całek singularnych. Będziemy rozważać transformaty Riesza, które formalnie zdefiniowane są jako $R_j = (\frac{\partial}{\partial x_j} + V_j(x_j))L^{-1/2}$, $j = 1,\ldots,d$. Przy pewnych założeniach na L dowodzimy, że $f \in H^1_L(X,\mu)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $R_j f \in L^1(X,\mu)$ dla $j = 1,\ldots,d$.

Ostatnia część rozprawy dotyczy twierdzeń mnożnikowych dla operatora Bessela B. Rozważamy spektralne mnożniki $m(B)$ oraz zakładamy, że funkcja m spełnia klasyczny warunek Hörmandera. Dowodzimy, że operator $m(B)$ jest ograniczony z $L^1(X,\mu)$ do $L^{1,\infty}(X,\mu)$ oraz z $H^1_B(X,\mu)$ do $H^1_B(X,\mu)$. Ponadto analizujemy urojone potęgi operatora Bessela B^{ib}, $b \in \mathbb{R}$, by pokazać, że nasze twierdzenie mnożnkowe jest optymalne.