Problemy wyjścia dla procesów typu Lévy'ego oraz ich zastosowania

Adam Kaszubowski

Streszczenie

W rozprawie rozważono problemy wyjścia dla dwóch klas procesów stochastycznych pochodzących od spektralnie ujemnych procesów Lévy'ego, a w szczególności zastosowanie tych problemów do teorii ruiny oraz problemu optymalnej wypłaty dywidend. Praca składa się ze wstępu, trzech rozdziałów oraz bibliografii.

W pierwszym rozdziale przedstawiono definicje potrzebne w pozostałych rozdziałach pracy. Dodatkowo, wprowadzony został problem optymalnego wypłacania dywidend oraz omówiono rozwiązanie tego problemu w przypadku spektralnie ujemnych procesów Lévy'ego.

Drugi rozdział zawiera rozwiązanie problemu optymalnej wypłaty dywidend w modelu, który zakłada, że proces ryzyka posiada załamanie dryfu w zerze. Proces, na którym bazuje ten rozdział, to tak zwany process załamany Lévy'ego (ang. refracted Lévy process). Jest on silnym rozwiązaniem następującego stochastycznego równania różniczkowego

$$dR_t = dX_t - \delta \mathbf{1}_{\{R_t>0\}} dt,$$

gdzie $\delta > 0$, X jest spektralnie ujemnym procesem Lévy'ego oraz $R_0 = X_0$. Ponadto, w tym modelu zakładamy, że moment bankructwa jest definiowany poprzez moment paryskiej ruiny, która pozwala na odróżnienia technicznej ruiny od faktycznego bankructwa. Mianowicie, bankructwo następuje wtedy, gdy proces ryzyka przebywa poniżej zera przez czas dłuższy niż ustalone $r > 0$. Ponadto, z wypłatą każdej dywidendy związany jest stały koszt transakcji $\beta > 0$. Ostatnie założenie powoduje niemożność wykorzystania strategii barierowej, będącej częstym obiektem badań w sferze optymalności strategii wypłacania dywidend. Zamiast tej strategii rozważono strategię impulsową, która zakłada, że po przekroczeniu ustalonego poziomu c_2 proces jest przenoszony do poziomu c_1 oraz wypłacana jest dywidenda o wartości $c_2 - c_1 - \beta$, a więc obniżona o koszt transakcji. W języku funkcji skalujących pokazano warunki wystarczające na optymalność tej strategii, a także przedstawiono wyniki numeryczne ilustrujące optymalny poziom barier (c_1, c_2). Dodatkowo, przedstawiono analityczne wzory na nowe funkcję skalujące dla procesów załamanych, gdy X jest liniowym ruchem Browna lub procesem Crámera-Lundberga z wykładniczymi roszczeniami.

W części trzeciej pracy rozważono problemy wyjścia dla procesów Markowsko addytywnych. Są to dwuwymiarowe procesy stochastyczne postaci (X, J), w których składnik X odpowiada za położenie (część addytywna) procesu, natomiast drugi składnik J odpowiada za losowe środowisko. Proces J jest procesem Markowa ze skończoną przestrzenią stanów $E = \{1, 2, 3, ..., N\}$. Natomiast, gdy proces J znajduję się w stanie $i \in E$, to proces X zachowuję się (w sensie przyrostów) jak pewien spektralnie ujemny proces Lévy'ego X^i. Dodatkowo, rozważono zabijanie procesu z intensywnością ω będącą ograniczoną i nieujemną funkcją zależną od położenia procesu X oraz stanu procesu J. Innymi słowy, definiuje się

następujący czas zatrzymania

$$\tau_\omega := \inf\{t > 0 : \int_0^t \omega_{J_s}(X_s)ds > e_1\},$$

gdzie e_1 jest niezależną zmienną losową wykładniczą z parametrem 1. Następnie, gdy $t > \tau_\omega$ proces jest zabijany, a więc umieszczany w specjalnym stanie. W przypadku, gdy $\omega \equiv q > 0$, otrzymujemy klasyczne wykładnicze zabijanie procesu. Dla tak zdefiniowanego modelu pokazano reprezentację problemów wyjścia w języku, tak zwanych, funkcji ω-skalujących, będących funkcjami o wartościach macierzowych. Jest to istotny krok, gdyż wiele problemów praktycznych można wyrazić w języku tychże funkcji, co zostało zilustrowane reprezentacją funkcji wartości w problemie optymalnego wypłacania dywidend w tak zwanym Omega modelu. W tym modelu moment ruiny definiowany jest jako

$$\tau_\omega^d := \inf\{t > 0 : \int_0^t \omega_{J_s}(X_s)ds > e_1 \vee X_t < -d\},$$

gdzie (zazwyczaj) $d > 0$. Dodatkowo założono, że w tym modelu funkcja ω przyjmuje wartości dodatnie jedynie w pewnym obszarze. Założenie to pozwala interpretować funkcję ω jako funkcję kary za przebywanie w tak zwanym *red zone*. Zauważmy dodatkowo, że gdy proces X zejdzie poniżej poziomu $-d$, to następuje natychmiastowa ruina, co pozwala na pewnego rodzaju ograniczenie wartości procesu X w momencie bankructwa.

Ponadto, przedstawiono przykłady funkcji ω-skalujących dla różnych wyborów funkcji ω, w przypadku gdy (X, J) jest Markowsko modulowanym ruchem Browna, będącym odpowiednikiem klasycznego liniowego ruchu Browna.