Streszczenie

Poniższa rozprawa skoncentrowana jest wokół problemów związanych z łańcuchami Markowa na skończonych przestrzeniach stanów, które możemy rozwiązać wykorzystując pewne dualności między łańcuchami. W ogólności mówimy, że łańcuch $\mathbf{X}^*$ z macierzą przejścia $\mathbf{P}_{X^*}$ jest łańcuchem dualnym do $\mathbf{X}$ z macierzą przejścia $\mathbf{P}_X$ jeśli zachodzi (pomijamy warunki na rozkłady początkowe)

$$\Lambda \mathbf{P}_X = \mathbf{P}_{X^*} \Lambda,$$

gdzie Λ jest tzw. *linkiem*. Różne linki wyznaczają różne dualności. Dla konkretnych rodzajów dualności potrzebne są dodatkowe założenia na macierze przejść. Założenia te są mocno związane z porządkiem, najczęściej częściowym, przestrzeni stanów.

W pierwszym rozdziale rozprawy rozważamy monotoniczność Möbiusa, jej związek z innymi monotonicznościami (w tym m.in. ze stochastyczną monotonicznością) i z *symulacją doskonałą* (ang. *perfect simulation*) – metodą, która zwraca nieobciążoną próbkę z rozkładu stacjonarnego zadanego ergodycznego łańcucha Markowa. W tym rozdziale prezentujemy nowy algorytm do wspomnianej symulacji doskonałej bazujący na tzw. *mocnej dualności stacjonarnej* (ang. *strong stationary duality*), jego użycie wymaga wspomnianej monotoniczności Möbiusa.

Kolejny rozdział poświęcony jest wielowymiarowym modelom ruiny gracza. Okazuje się, że iloczyny Kroneckera dobrze *współpracują* z macierzowymi wzorami dla dualności, co pozwala uogólnić klasyczne wyniki. W szczególności, pokazujemy dużą rodzinę wielowymiarowych łańcuchów (które odpowiadają jakimś wielowymiarowym wersjom modelu ruiny gracza), które mają takie samo prawdopodobieństwo wygrania (na co podajemy wzór) i/lub taki sam rozkład czasu do wygranej/przegranej (podajemy jego strukturę).

Ostatni rozdział związany jest z rozkładem czasu trwania gry w modelu ruiny gracza (jednowymiarowym) pod warunkiem zwycięstwa bądź porażki – rozważamy model z dowolnymi prawdopodobieństwami wygrania/przegrania w jednym kroku. Pokazujemy m. in. interesujące symetrie wyników dla modelu oryginalnego i modelu z odwróconymi prawdopodobieństwami wygrania/przegrania. Stosując uzyskane wyniki (oraz mocną dualność stacjonarną), polepszamy wyniki dotyczące prędkości zbieżności do stacjonarności dla symetrycznego błądzenia po okręgu.

Wrocław, 16.12.2021 Piotr Markowski